EUCLIDES

vakblad voor de wiskundeleraar

mei 10

nr 6

jaargang 85





Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

COLOFON

mei 10
nr 6
jaargang 85

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394



Inzendingen bijdragen
Artikelen en mededelingen naar de hoofdredacteur: Klaske Blom, Westerdoksdijk 39, 1013 AD Amsterdam
E-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen
Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in drievoud. Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
Zie voor nadere aanwijzingen: www.nvvw.nl/euclricht.html

Realisatie
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Website: www.nvvw.nl

Voorzitter
Marian Kollenveld,
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
Tel. (070) 390 70 04
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris
Kees Lagerwaard,
Eindhovensingel 15, 6844 CA Arnhem
Tel. (026) 381 36 46
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie
Elly van Bemmel-Hendriks,
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
Tel. (0321) 31 25 43
E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Postbus 405, 4100 AK Culemborg
Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor
- leden: € 65,00
- leden, maar dan zonder Euclides: € 37,50
- studentleden: € 32,50
- gepensioneerden: € 37,50
- leden van de VVWL of het KWG: € 37,50

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden
Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Personen (niet-leden van de NVvW): € 60,00
Instituten en scholen: € 140,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 17,50
Betaling per acceptgiro.

Kort vooraf

[Klaske Blom]

Zonnige tijden?

Na een zonovergoten en heel warm weekeind in Limburg zit ik nu onder een halfbewolkte, maar nog steeds blauwe hemel in Amsterdam mijn stukje te schrijven voor dit *Euclides*-nummer, me afvragend of de periode waarin u dit leest, ook zonnig zal zijn; letterlijk, maar vooral ook figuurlijk. De meivakantie is achter de rug en de examens zijn begonnen. Heeft u al werk gezien van uw havo-leerlingen? Wat was uw indruk van het examen? Na de ervaringen van vorig jaar lijkt het me dit jaar extra spannend. Misschien heeft u meegedaan met de pilot computer-examens in het vmbo. Hoe deden uw leerlingen het? Konden ze hun kennis en vaardigheden kwijt op het scherm? Ik wens u allen goede moed en wijsheid bij het corrigeren. Mocht u tussendoor even pauze willen houden, dan hoop ik dat u al lezend in *Euclides* even de zinnen kunt verzetten.

Concreet materiaal

Het is niet onze sterkste kant om zeer concreet lesmateriaal aan te reiken in *Euclides*, maar deze keer moet u toch zorgen dat u het niet mist: het prachtige aanbod aan concrete lesideeën rond het materiaal van Ludoph van Ceulen in het artikel van de Marjanne de Nijs en Margot Rijnierse. Verder heeft Kim Kaars een heus werkblad over het tekenen van hoeken toegevoegd aan haar artikel; zo te gebruiken! Via de verwijzing in het persbericht over de samenwerking tussen Math4all en GeoEnZo komt u snel terecht bij een basispakket voor het digitale schoolbord.
De bijdrage van Henk Broer en Kees van der Straaten vraagt weer meer eigen 'vertaalactiviteit', maar u krijgt wel een aantal teksten aangereikt voor het behandelen van complexe getallen bij wiskunde D of NLT.
Uiteraard is er nog een groot aantal informatieve stukken en artikelen waarin u tot verder nadenken en/of reageren opgeroepen wordt. Twee bijdragen wil ik u nog kort onder de aandacht brengen, namelijk de twee artikelen op de verenigingspagina's: u vindt een artikel over het bijhouden van onze eigen bekwaamheid door middel van adequate scholing. De overheid heeft ter ondersteuning daarvan de *lerarenbeurs* in het leven geroepen. Als u deze beurs had willen aanvragen voor het komend schooljaar, had u dat al voor 13 mei moeten doen. Maar voor scholing bent u niet afhankelijk van deze beurs; er is veel geld beschikbaar binnen de scholen. Vergeet niet er gebruik van te maken! En de tweede bijdrage vanuit de vereniging is een verslag van de vmbo-werkgroep. Het is interessant om te weten welke onderwerpen aan de orde komen in de werkgroep. Als u ook thema's op de agenda wilt plaatsen van deze werkgroep, kunt u zich aanmelden. Sinds dit schooljaar ligt mijn hoofdactiviteit in het vmbo. Een fantastische plek waar ik kinderen tegenkom die heel leergierig zijn, maar ook zo veel teleurstellingen te verwerken krijgen, omdat juist dat leren zoveel problemen oproept. Het is dus niet alleen een *Euclides*- maar ook een persoonlijk belang dat ik hier nogmaals graag collega's oproep om te schrijven over hun ervaringen: hoe stimuleert en bemoedigt u juist déze leerlingen en helpt u ze om te leren structureren en over dompers heen te komen? Wat is úw speciale didactiek? Ik lees er graag over!

Wetgeving

Het is u vast niet ontgaan dat er veel belangstelling is voor goed reken-, wiskunde- en taal-onderwijs. In januari j.l. stemde de ministerraad in met het wetsvoorstel 'Referentieniveaus taal en rekenen' en vervolgens werd het referentiekader bij wet vastgesteld. Daarmee ligt dus vast wat leerlingen op bepaalde momenten in hun schoolcarrière moeten kennen en kunnen op het gebied van rekenen. Hoe we dat gaan toetsen en welke rol de behaalde resultaten gaan spelen in de slaag/zak-regeling, is iets dat de komende tijd duidelijk zal moeten worden. Er wordt op veel fronten aan gewerkt. Het lijkt raadzaam om de informatie daarover goed in de gaten te houden zodat u weet wat u op uw school *wel*, maar vooral ook wat u *niet* in gang moet zetten. We doen ons best om u in *Euclides* te informeren met achtergrondartikelen. Voor de actualiteit verwijs ik u graag naar relevante websites en de *WiskundE-brief*. In dit nummer vindt u een artikel van Frank van Merwijk met informatie over een minor rekenen die gegeven wordt aan de diverse lerarenopleidingen.

Tot slot

Met onze excuses voor een enkele weggevallen regel en een foto in het artikel 'Viervlakken tussen Kunst en Wiskunde' van Ton Konings in *Euclides* nr. 5 plaatsen we het ontbrekende alsnog in een erratum elders in dit nummer.
Rest mij u sterkte te wensen in de examentijd en de vaak hectische eindejaarsperiode die daarna aanbreekt en met u te hopen op goede resultaten!

Inhoud

Aan dit nummer werkte verder mee: Juliëtte Feitsma.

Duytsche Mathematicque



[Jantien Dopper]

In 2010 is het 400 jaar geleden dat Ludolph van Ceulen overleed. Om verschillende redenen is het mooi om daar aandacht aan te besteden. Van Ceulen was een verwoed rekenaar die steevast 'met lust ende arbeyt' verder rekende waar anderen stopten. Doordat hij niet academisch geschoold was, nam hij niet altijd de meest voor de hand liggende weg; wel bedreef hij wiskunde van internationaal niveau. Er zijn inderdaad verschillende redenen waarom we van mening zijn dat Van Ceulen en zijn werk de moeite waard zijn om een serie artikelen aan te wijden. Zijn werk ademt steeds een werklustige frisheid, zijn wiskunde is vaak mooi en boeiend, en dat maakt het tot heel interessant materiaal om met leerlingen aan te werken. Het kijken naar de problemen waarmee wiskundigen in zijn tijd worstelden, geeft een verdieping aan de schoolwiskunde van nu. Daar komt nog bij dat Van Ceulen interessante, soms zelfs spetterende, relaties met zijn omgeving had en daardoor leren we dan weer iets over de tijd waarin hij leefde. Al met al dus genoeg reden om u acht (nu nog vijf) nummers lang te trakteren op Van Ceulen-verhalen, geschreven door diverse specialisten.

Op 10 januari 1600 werd Ludolph van Ceulen op 59-jarige leeftijd aangesteld als een van de twee professoren aan de net opgerichte *Duytsche Mathematicque*, een ingenieursschool. Van Ceulen was zijn loopbaan begonnen als scherm- en rekenmeester en de functie als hoogleraar aan de ingenieursschool vormde de erkenning van zijn capaciteiten en kwaliteiten. Tot aan zijn dood op 31 december 1610 bleef Ludolph van Ceulen als hoogleraar aangesteld.
Na het overlijden van Van Ceulen kwam het hoogleraarschap van de Duytsche Mathematicque in handen van de familie Van Schooten. Achtereenvolgens werden Frans van Schooten senior, Frans van Schooten junior en Pieter van Schooten aangesteld als hoogleraar. In 1679 werd er na de dood van Pieter van Schooten geen opvolger benoemd en zo kwam er een einde aan bijna acht decennia Duytsche Mathematicque.

Met de oprichting van de Duytsche Mathematicque ontstond er in Holland een nieuwe instelling waarin praktisch onderwijs in de wiskunde centraal stond. Het bestaansrecht van de opleiding was sterk gerelateerd aan de politiek-militaire situatie in de Nederlanden. De jonge Republiek was in 1600 in een felle strijd verwikkeld met de voormalige landsheer Filips II van Spanje. Maurits, de zoon van Willem van Oranje, was vanaf 1585 tot zijn dood in 1625, kapitein-generaal van het leger en wilde het leger hervormen en moderniseren. Tevens had hij had een grote belangstelling voor de wetenschappen en wiskunde. Zijn belangrijkste gesprekspartner voor wiskundige onderwerpen was Simon Stevin, die vanaf 1593 ook actief was in het leger, alhoewel zijn positie pas in 1604 formeel werd vastgelegd. De lessen en gesprekken tussen Maurits en Stevin resulteerden in het werk *Wisconstige Ghedachtenissen*. De belangstelling van Maurits voor wiskunde was ingegeven door de opvatting dat het gebruik van wiskunde kon leiden tot een beter georganiseerd en vaardiger leger. Bovendien had hij behoefte aan praktisch geschoolde vaklieden die kennis hadden van landmeten en fortificatie om het land te kunnen dienen. En ook werden er in de maatschappij in toenemende mate hogere eisen gesteld aan ingenieurs en landmeters. Zo kregen landmeters naast het bepalen van oppervlakten van percelen steeds vaker de taak om kaarten te maken van de percelen die zij opmaten, en dat vereiste meer wiskundige kennis. Om de aankomend ingenieurs en landmeters van de noodzakelijke kennis te voorzien nam Maurits in 1600 het initiatief tot het oprichten van de Duytsche Mathematicque. Hij liet zijn vertrouweling Simon Stevin een opzet maken van het lesprogramma en daarnaast beval hij Ludolph van Ceulen en Simon van Merwen aan als docenten.[1] Van Merwen was landmeter en oud-burgemeester van de stad Leiden.
Simon Stevin en Ludolph van Ceulen waren voor elkaar geen onbekenden. Reeds in 1582 had Van Ceulen een oplossing gegeven voor een probleem dat hem door Simon Stevin was aangedragen. Het is dus goed mogelijk dat Stevin Van Ceulen heeft aangedragen als docent bij Maurits, alhoewel Van Ceulen zelf ook connecties met de Oranjes had. Voor zijn verhuizing naar Leiden in 1594 was Ludolph van Ceulen werkzaam als schermmeester in Delft en zijn schermschool was gevestigd in de kapel van het Sint Agathaklooster, waarvan ook een deel in gebruik was als hof van Willem van Oranje. Zijn meesterwerk, *Vanden Circkel* (1596), droeg Van Ceulen op aan Willem's zoon Maurits, de oprichter van de Duytsche Mathematicque.

Een buitenbeentje van de universiteit

De Duytsche Mathematicque was een vreemde eend in de bijt van de Leidse universiteit. Sinds de oprichting van de academie was deze sterk humanistisch van karakter geweest, waarbij bestudering van klassieke bronnen centraal stond. De meer praktische aanpak van de Duytsche Mathematicque lag niet in het verlengde van de humanistische stijl. Bovendien was de voertaal aan de Duytsche Mathematicque afwijkend van de voertaal aan de rest van de universiteit. Normaliter werden colleges in het Latijn gegeven, maar Maurits stond er op dat de lessen aan voor de toekomstig ingenieurs 'in goeder duytscer tale' werden gedoceerd. Dit besluit zal er mee te maken hebben gehad dat de



kennis van het Latijn van de beoogde doelgroep, de aankomend ingenieurs en landmeters, over het algemeen niet van voldoende niveau was om colleges in die taal te kunnen volgen. Daarnaast was Simon Stevin van mening dat de Nederlandse taal het meest geschikt was voor het uitwisselen van wetenschappelijke ideeën.
Rond dezelfde tijd gebeurde iets vergelijkbaars in Friesland. Daar had de in 1598 aan de universiteit van Franeker aangestelde wiskundige en vestingbouwer Adriaan Metius bedongen dat hij zijn lessen naar keuze in het Latijn of Nederlands mocht geven. Later werd het voorbeeld gevolgd in Amsterdam, waar vanaf 1653 aan het Athenaeum ook wiskundecolleges in het Nederlands werden verzorgd door De Bie.
Hoewel het college van curatoren en burgemeesters Van Ceulen en Van Merwen benoemden, en Maurits wilde dat de opleiding deel van de universiteit uitmaakte, namen de hoogleraren van de Duytsche Mathematicque een aparte positie in. Zij maakten bijvoorbeeld geen deel uit van de Senaat, het college van professoren waarin zaken aangaande de universiteit werden besproken en de rectorsverkiezingen plaatsvonden.[2] Voor de studenten van de Duytsche Mathematicque gold ook dat hun positie afweek van die van de reguliere studenten aan de academie. Uit verzoekschriften van studenten, met als inzet vrijstelling van de bier- en wijnaccijns, blijkt dat zij niet dezelfde voorrechten genoten als de studenten ingeschreven aan andere faculteiten van de universiteit.[3]

Het lesprogramma volgens de opzet van Stevin

De opzet van Stevin geeft aan hoe er volgens hem invulling moest worden gegeven aan de lessen. Iedere les duurde een uur, waarvan het eerste half uur bestemd was voor een algemeen hoorcollege en er in het tweede half uur tijd was voor het oefenen met de leerstof en het beantwoorden van vragen van studenten. De studenten moesten dus niet enkel luisteren, maar zich ook de leerstof eigen maken. De theorielessen vonden plaats in de Faliebagijnkerk aan het Rapenburg, waar ook het anatomisch theater en de bibliotheek gevestigd waren, evenals Van Ceulen's schermschool. De instructie geeft ook een overzicht van het curriculum van de Duytsche Mathematicque. Stevin had een opbouw voor ogen in het lesprogramma. Het doel was de jongemannen kennis bij te brengen zodat zij 'het landt als ingenieurs (...) connen dienen'.
Hiertoe werden delen van de arithmetica en het landmeten onderwezen,
maar enkel 'soo veel als tot het dadelijck gemeen ingenieurschap noodich is'. Welke onderdelen voor een ingenieur nodig waren, zette Stevin daarna uiteen. Grofweg zijn drie fasen te onderscheiden.
In de *eerste* fase van de opleiding moesten de aankomend ingenieurs de basisbewerkingen van het *rekenen* (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen) in gehele getallen, breuken en decimale breuken onder de knie krijgen. Deze decimale breuken waren door Stevin in 1585 gepropageerd in het werk *De Thiende* en nog een relatieve noviteit in de wiskunde. In de bijlage bij *De Thiende* had Stevin reeds uit de doeken gedaan hoe het werken met decimale breuken in de landmeetkunde het rekenwerk kon vereenvoudigen. Het opstellen van het lesprogramma bood Stevin de kans de verspreiding van decimale breuken verder te stimuleren. Verder moest de toekomstig ingenieur kunnen werken met de 'regel van drieën', dat wil zeggen, hij moest x kunnen bepalen uit $x : a = b : c$ waarbij a, b en c gegeven zijn. Deze rekenregel kwam in zowat alle rekenboekjes van de vroegmoderne tijd onder deze naam voor.

Zodra de student ervaren was in het rekenen, kon er een begin worden gemaakt met het *tweede* onderdeel van de opleiding: het *landmeten*. Deze fase bestond uit eerst een theoretisch deel, en wanneer de student daarin voldoende geoefend was, een praktisch deel. Het theoretische deel week sterk af van de klassieke meetkunde. In problemen uit de klassieke meetkunde werd een lijnstuk (of een punt of een verzameling punten) met een bepaalde eigenschap gezocht. Een probleem was opgelost wanneer er een constructie van het lijnstuk (of het punt of de verzameling punten) was gegeven. Verder kwamen er in de klassieke meetkunde geen getallen voor, hetgeen betekende dat een lijnstuk geen lengte had die in een getal was uitgedrukt. Nadrukkelijk stelt Stevin dat het in de te onderwijzen meetkunde aan de Duytsche Mathematicque niet de bedoeling is de klassieke lijn te volgen, maar dat men in de meetkunde moet werken met lijnstukken die juist wél een lengte hebben. Het doel van de meetkunde was het bepalen van oppervlakten van tweedimensionale figuren en de inhoud van driedimensionale objecten. Verder hoefde de ingenieur geen kennis te hebben van kegelsneden (ellipsen, parabolen en hyperbolen) aangezien hij deze krommen in de praktijk niet snel zou tegenkomen, en oppervlakten van kromlijnige figuren ook met driehoeken goed te benaderen zijn.
Wanneer de student bedreven was in de theorie van het landmeten was het tijd de geleerde kennis in de praktijk te brengen. In het veld leerde de student een op papier getekende figuur met bakens uit te zetten, en een kaart te maken van een in het veld uitgezette figuur. Daarnaast werd in de praktijklessen geoefend met instrumenten waarmee hoeken gemeten konden worden en andere instrumenten die de landmeter tot nut konden zijn.

Hierna volgde de *derde* en laatste fase van de opleiding: de *fortificatie*. Net als het landmeten viel dit onderdeel uiteen in een theoretisch en praktisch gedeelte in het veld. Tijdens de theorielessen leerde de student de terminologie van de vestingbouw en de beginselen van het fortificeren van steden. Wanneer dit onder de knie was, raadde Stevin de student aan 's zomers in het leger mee te lopen om zo de aanleg van versterkingswerken in de praktijk te kunnen aanschouwen. In de winter, zo besloot Stevin, mochten de ingenieurs altijd terug komen naar Leiden om zich daar nog meer te verdiepen in 'diepsinnigher stoffen' van het ingenieurschap.

Lespraktijk en studenten

Uit de opzet van het lesprogramma van Simon Stevin blijkt het ideaalbeeld waaraan de opleiding moest voldoen. Over de praktijk van de lessen uit de beginjaren zijn we echter veel minder goed geïnformeerd. Wel is bekend dat Ludolph van Ceulen vanwege zijn gevorderde leeftijd al snel een van zijn meest getalenteerde studenten aannam als assistent. Deze assistent was Frans van Schooten senior, de latere opvolger van Van Ceulen als hoogleraar.
Van Schooten begon als manusje van alles en was in het begin belast met hand- en spandiensten zoals het dragen van instrumenten en het uitzetten van de bakens tijdens de praktijklessen landmeten in het veld. Na enkele jaren van assistentschap nam Van Schooten steeds meer taken van Van Ceulen over omdat Van Ceulen 'een oudt man was' [4]. De praktijklessen in het veld kwamen nu volledig voor rekening van Van Schooten en daarnaast nam hij ook de schermlessen aan de schermschool voor zijn rekening. Na het overlijden van Simon van Merwen in het voorjaar van 1610 verdubbelde de werklast van Van Ceulen, waardoor hij nog meer taken overdroeg aan Van Schooten. Volgens zeggen van Van Schooten was Ludolph

van Ceulen zeer content met hem en had Van Ceulen graag dat Van Schooten hem zou opvolgen. Na de dood van Van Ceulen zou Van Schooten inderdaad de lessen aan de Duytsche Mathematicque voortzetten. Hij kreeg echter pas een vaste aanstelling als hoogleraar in 1615. Uit de opzet van het lesprogramma van Stevin blijkt dat de fortificatie een belangrijk onderdeel van de opleiding was. Van actieve bemoeienis door Ludolph van Ceulen of Simon van Merwen met vestingbouw is echter niets bekend. Hun opvolger Frans van Schooten sr. was in 1629 wel betrokken bij de versterkingen van de waterlinie tussen de Zuiderzee en de Lek. Aangezien een Spaanse inval vanaf de Veluwe dreigde, ontwierpen de Staten een plan voor een versterkte linie om de stad Utrecht en het gewest Holland te beschermen. Deze linie liep van Vreeswijk aan de Lek via de oostkant van Utrecht en dan langs de Vecht naar Muiden. De stad Utrecht huurde Van Schooten sr. samen met zijn zoon en twee andere ingenieurs in om de vestingwerken aan de oostkant van de stad te ontwerpen en uit te voeren.
Over de herkomst van de studenten is bijzonder weinig bekend, omdat de studenten niet werden genoteerd in het inschrijfregister van de universiteit. Uit overgeleverde verzoekschriften van de studenten uit de periode 1611-1615 blijkt dat het publiek onder meer bestond uit timmergezellen, landmeters, schoolmeesters en steenhouwers. Het is maar de vraag in hoeverre de opleiding inderdaad de ingenieurs heeft afgeleverd die Maurits voor ogen had. In het leger waren er in ieder geval slechts een beperkt aantal ingenieurs met een vaste aanstelling; het merendeel werd op projectbasis ingehuurd als er versterkingen gebouwd moesten worden. In 1646 schreef Van Schooten jr. aan Constantijn Huygens dat de Duytsche Mathematicque naast ingenieurs ook bedoeld was om schoolmeesters, landmeters en wijnroeiers op te leiden.[5] Deze verandering waarbij ook civiele beroepen uitdrukkelijk worden genoemd als doel van de opleiding, heeft te maken met de veranderende situatie in de Republiek. Met de Vrede van Münster in 1648 erkende Spanje de Republiek als soevereine staat en hiermee kwam er een einde aan de oorlogssituatie met Spanje. Direct werden de budgetten voor het leger gekort. De directe noodzaak tot het opleiden van ingenieurs en vestingbouwers voor het leger kwam hiermee weg te vallen.

Competentie

In het vorige nummer van *Euclides*[6] heeft Fokko Jan Dijksterhuis gewezen op het gebrek aan formele structuren om iemands wiskundige competentie te bepalen. Gevolg hiervan was dat wiskundigen zelf de publiciteit zochten om zo hun kunde te verkondigen en andermans onkunde aan de kaak te stellen. Aan de Duytsche Mathematicque speelde ook de kwestie van de deskundigheid van de studenten. Reeds in augustus 1600 meldden zich de eerste toehoorders bij Ludolph van Ceulen omdat zij een getuigenis van hun bekwaamheid in het landmeten wilden. Hierop gaven de curatoren en burgemeesters de beide hoogleraren toestemming tot het examineren van de kandidaten. Geslaagden kregen dan een brief van bekwaamheid voorzien van het zegel van de universiteit. Blijkbaar was de kwestie hiermee nog niet voldoende opgelost, want in november 1602 werd er weer gedebatteerd in het college van curatoren en burgemeesters over het examen en de te behalen akte. Ditmaal werd besloten dat de studenten, ten einde een brief van bekwaamheid te krijgen, examen moesten afleggen in aanwezigheid van zowel de professoren van de Duytsche Mathematicque als de hoogleraar wiskunde van de universiteit, in dit geval Rudolph Snellius. Daarnaast probeerde de universiteit de Staten van Holland zover te krijgen dat aspirant-landmeters het toelatingsexamen tot landmeter voortaan in Leiden zouden afleggen en dat iedere landmeter in Holland verplicht de opleiding te Leiden zou moeten doorlopen.
Dit door Leiden gewenste monopolie op de landmetersopleiding heeft het echter niet gehaald en de bestaande structuur, met een examen in Den Haag, bleef in stand. Van de 187 landmeters die de Staten van Holland in de periode 1602-1641 admitteerden, noemden 69 de Duytsche Mathematicque als genoten opleiding. Verder traden de professoren van de Duytsche Mathematicque tot 1641 regelmatig op als examinatoren van de landmeters bij de Staten. Zo heeft Ludolph van Ceulen in de periode 1602-1608 regelmatig aspirant-landmeters aan een examen onderworpen.[7]
De oprichting van de Duytsche Mathematicque toont de belangstelling voor praktisch georiënteerde wiskunde aan het begin van de 17de eeuw. De actieve bemoeienis van Maurits bij de oprichting laat zien dat deze belangstelling zich ook tot hogere kringen uitstrekte. Na de oprichting was het aan Ludolph van Ceulen om samen met Simon van Merwen de eerste tien jaar vorm te geven aan de dagelijkse praktijk van de Duytsche Mathematicque in Leiden. Voor Van Ceulen moet de benoeming tot hoogleraar de kroon op zijn carrière zijn geweest.

Transformatie van figuren

Van *n*-hoek naar driehoek met dezelfde oppervlakte
In zijn werk *Vanden Circkel* (1596) wijdt Ludolph van Ceulen enkele van de honderd voorbeelden uit het 22e hoofdstuk aan een methode om een willekeurige *n*-hoek te transformeren in een driehoek met hetzelfde oppervlakte als de gegeven *n*-hoek. In het postuum verschenen *Arithmetische en Geometrische Fondamenten* (1615) handelt het begin van het derde deel over deze materie. In een handschrift van Frans van Schooten,[8] die na de dood van Van Ceulen diens lessen overnam aan de Duytsche Mathematicque, komt hetzelfde onderwerp ook aan de orde.
De methode om een *n*-hoek te transformeren tot een driehoek komt neer op herhaald toepassen van hetzelfde stappenplan. Een stap transformeert een *n*-hoek in een (*n*-1)-hoek met dezelfde oppervlakte. Aan de hand van het voorbeeld van een onregelmatige vierhoek illustreren we de werkwijze. Laat *ABCD* een onregelmatige vierhoek zijn (***zie figuur 1***). We willen deze vierhoek transformeren tot een driehoek met gelijke oppervlakte. Trek de lijn *AC* en trek door het punt *B* de lijn *l* evenwijdig aan *AC*. Het snijpunt van de lijn *l* en *DC* verlengd is *E*. Nu is de oppervlakte van driehoek *ADE* gelijk aan de oppervlakte van de vierhoek *ABCD*. Dit zien we door te kijken naar de driehoeken. Eerst merken we op dat de oppervlakte van de driehoek *ABC* gelijk is aan de oppervlakte van de driehoek *ACE* aangezien ze dezelfde basis en hoogte hebben. Omdat de oorspronkelijke vierhoek *ABCD* bestaat uit de driehoeken *ACD* en *ABC* en de geconstrueerde driehoek *AED* bestaat uit de driehoeken *ADC* en *ACE*, concluderen we dat de oppervlakten gelijk zijn. Tenslotte merken we op dat het punt *E* ook gedefinieerd kan worden als het snijpunt van de lijn *l* met het verlengde van *AD*. In dat geval is de gevraagde driehoek *DCE* een lange smalle driehoek.

In figuur 2 is een zeshoek *ABCDEF* gegeven. Herhaald toepassen van de methode levert via de vijfhoek *ABCGF* en de vierhoek *ABCH* uiteindelijk de driehoek *ICH*, die dezelfde oppervlakte heeft als de oorspronkelijke zeshoek.

Cirkelkwadratuur

Ludoph van Ceulen is met name bekend geworden door zijn berekeningen van (uiteindelijk) 35 decimalen van pi. Daarnaast heeft Van Ceulen in druk de cirkelkwadraturen van Simon van der Eycke en Scaliger bekritiseerd. In de *Arithmetische en Geometrische Fondamenten* vinden we op pagina 148 echter toch enkele manieren om bij een gegeven cirkel een vierkant te construeren met dezelfde oppervlakte als de cirkel. Van Ceulen vertelt de lezer er dan wel bij dat tot nu toe niemand het probleem 'volcomen' heeft kunnen oplossen, maar dat wel velen een methode hebben gevonden die een goede benadering geeft. De gevolgde methode staat zowel in de *Arithmetische en Geometrische Fondamenten* als in het hierboven vermelde handschrift van Frans van Schooten.

Gegeven is een cirkel met diameter *AC* en middelpunt *O*; ***zie figuur 3***. Verdeel *AC* in 14 gelijke stukken. Het punt *D* ligt op de diameter op $\frac{3}{14}$e deel van het eindpunt *A*. Trek vanuit *D* een loodlijn op de diameter; deze snijdt de cirkel in het punt *B*. Verbind *B* en *C*. Het lijnstuk *BC* is nu de zijde van het gezochte vierkant.

Uit deze constructie kunnen we de gebruikte benadering voor pi afleiden. Hiervoor stellen we dat de diameter van de cirkel 14 bedraagt. Omdat driehoek *ADB* gelijkvormig is met driehoek *BDC*, volgt: $AD : BD = BD : DC$, en dus:

$BD = \sqrt{AD \cdot DC} = \sqrt{33}$

In de cirkel is nu:

$BC = \sqrt{BD^2 - DC^2} = \sqrt{154}$

De oppervlakte van het vierkant op *BC* dus 154, en de oppervlakte van de cirkel is $\pi r^2 = 49\pi$. Aangezien de cirkel en het vierkant dezelfde oppervlakte hebben, blijkt dat de gebruikte benadering van pi het getal $\frac{154}{49} = \frac{22}{7}$ is.

Noten

[1] Simon Stevin: *Maniere en ordre* .... (Leiden, 1600); Amsterdam, Scheepvaartmuseum, signatuur B-I-0073 (II, 37). De opzet van het lesprogramma is ook afgedrukt in: P.C. Molhuysen: *Bronnen tot de geschiedenis der Leidsche Universiteit*. Den Haag, 1913; pp. 389-391 (RGP 20).

[2] 'Ende also vorders deselve professie bedient wort op een plaets buiten d'Academie, ende de professoren derselve in de Senatus Academicus niet en syn begreepen, nochte gemoeijt en werden, om over eenige questien ofte decisien te staen.' Frans van Schooten jr. aan Constantijn Huygens, 4 februari 1646. In: *Briefwisseling Constantijn Huygens, deel 4 (1644-1649)*; Den Haag: J.A. Worp ed., 1915; p. 278.

[3] Bron: Universiteitsbibliotheek Leiden, Archief Curatoren 1, inv. nr. 42/2.

[4] Frans van Schooten in een ongedateerde brief aan het college van curatoren en burgemeesters. Bron: Universiteitsbibliotheek Leiden, Archief Curatoren 1, inv. nr. 42/2.

[5] Frans van Schooten jr. aan Constantijn Huygens op 4 februari 1646. In: *Briefwisseling Constantijn Huygens, deel 4 (1644-1649)*; Den Haag: J.A. Worp ed., 1915; pp. 278-279.

[6] F.J. Dijksterhuis (2010): *Wiskunde op stand*. In: *Euclides* 85(5); pp. 186-188.

[7] E. Muller, K. Zandvliet (red.): *Admissies als landmeter in Nederland voor 1811*. Alphen aan den Rijn: Canaletto, 1987; p. 150, 154.

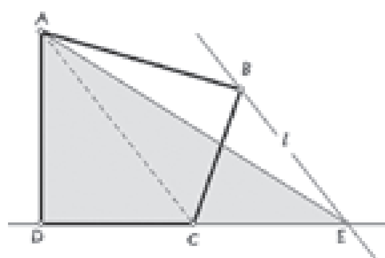
[8] Bron: Universiteitsbibliotheek Leiden, BPL 626.

Info

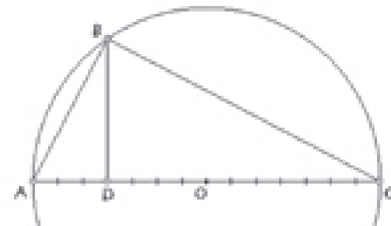
Zie verder ook: *www.ludolphvanceulen.nl*

Over de auteur

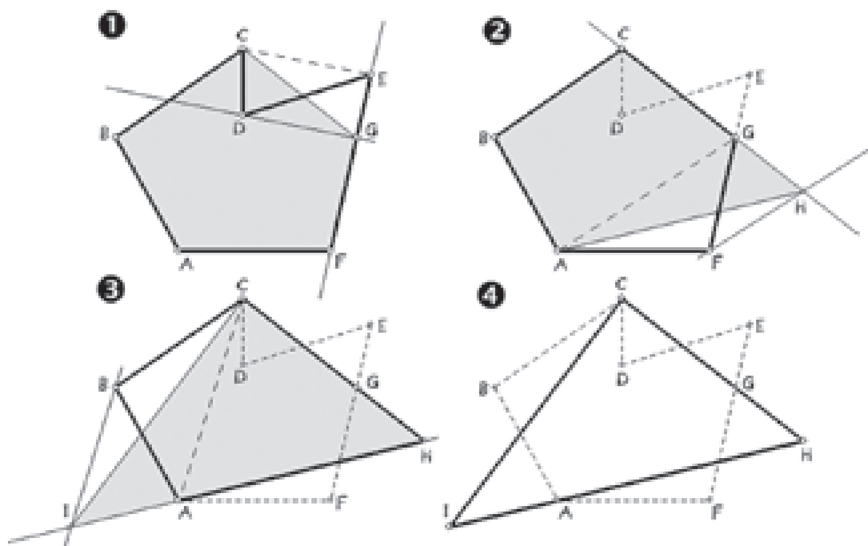
Jantien Dopper is als promovenda verbonden aan het Mathematisch Instituut van de Universiteit Utrecht. Zij werkt aan een proefschrift over de wiskundige Frans van Schooten (1615-1660).
E-mailadres: *j.g.dopper@uu.nl*



figuur 1



figuur 3



figuur 2

Op weg naar IMO2011

IMO2003 – OPGAVE 1



[Esther Bod]

Van 13 t/m 24 juli 2011 vindt voor het eerst in de geschiedenis in Nederland de Internationale Wiskunde Olympiade (International Mathematical Olympiad, IMO) plaats. Zo'n 600 leerlingen uit meer dan 100 landen zullen dan twee dagen lang in Amsterdam hun tanden zitten in een zestal zeer pittige wiskundeopgaven. Opgaven waaraan ook beroepswiskundigen vaak nog een flinke kluif hebben. Hoe zien die opgaven er eigenlijk uit? En wat trekt de deelnemers hierin zo aan? Om dat te ontdekken treft u in de komende nummers van *Euclides* elke keer een IMO-opgave uit het verleden aan, besproken door een leerling die indertijd in het Nederlandse team zat.

In 2002 en 2003 heb ik deelgenomen aan de Internationale Wiskunde Olympiade. Mijn eerste deelname, in Glasgow, was een erg leuke en bijzondere ervaring, maar ondanks een goede voorbereiding bleek het niveau van de opgaven voor mij iets te hoog gegrepen. Na een leerzame en gezellige training mocht ik in 2003 opnieuw meedoen. Deze keer ging de reis helemaal naar Tokio, wat het natuurlijk extra leuk maakte. Ik was vastbesloten meer punten te halen dan het jaar ervoor, en misschien zelfs een eervolle vermelding voor een volledig correct opgeloste opgave. De olympiade begon met een opgave die me wel leek te liggen.

De opgave

Laat S de verzameling $\{1, 2, \ldots, 1\,000\,000\}$ zijn, en laat A een deelverzameling van S zijn met precies 101 elementen.
Bewijs dat er in S getallen $t_1, t_2, \ldots, t_{100}$ bestaan zodat de verzamelingen $A_j = \{t_j + a \mid a \in A\}$ voor $j = 1, 2, \ldots, 100$ onderling disjunct zijn.

Ter herinnering, verzamelingen zijn disjunct als geen enkel getal in twee of meer van die verzamelingen voorkomt.
We kunnen ons A_j voorstellen als een kopie van A, maar dan 'verschoven' over t_j. We moeten dus 100 van zulke verschoven kopieën van A vinden, zodat ieder getal in hoogstens één kopie ligt.

Voorbeeld 1

We bekijken eerst een klein voorbeeld. Dat helpt vaak om meer inzicht te krijgen in de opgave, en om een idee voor de aanpak van het algemene probleem op te doen.
In plaats van een verzameling S met 1 000 000 elementen gaan we voor S uit van een verzameling met 10 elementen: $S = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Voor A gaan we uit van een verzameling met 4 elementen: $A = \{2, 4, 6, 8\}$. De verzameling A_j bestaat dan uit $t_j + 2$, $t_j + 4$, $t_j + 6$ en $t_j + 8$. Laten we gewoon proberen een aantal t_j's te kiezen, en kijken hoeveel we er kunnen vinden zodat de verzamelingen A_j disjunct zijn. Om te beginnen kiezen we $t_1 = 1$. Dan is $A_1 = \{3, 5, 7, 9\}$. We willen dat A_2 geen elementen hiermee gemeenschappelijk heeft. Dat gaat zeker goed als A_2 alleen grote getallen bevat. Daarom kiezen we t_2 zo groot mogelijk: $t_2 = 10$. Dan krijgen we $A_2 = \{12, 14, 16, 18\}$.
Voor t_3 proberen we gewoon de kleinste mogelijkheid: $t_3 = 2$. Dan is $A_3 = \{4, 6, 8, 10\}$. Dit mag, want A_3 is nu disjunct met zowel A_1 als A_2.
Wat kunnen we nu nog kiezen voor t_4? Als we $t_4 = 3$ kiezen, is $A_4 = \{5, 7, 9, 11\}$; dus dan zijn A_1 en A_4 niet disjunct. Hetzelfde geldt voor $t_4 = 5$ en $t_4 = 7$. Als we $t_4 = 4$, $t_4 = 6$ of $t_4 = 8$ kiezen, zijn A_3 en A_4 niet disjunct. We kunnen wel $t_4 = 9$ kiezen: $A_4 = \{11, 13, 15, 17\}$ is disjunct met A_1, A_2 en A_3. Iedere keuze voor t_5 levert nu een verzameling op die niet disjunct is met A_1, A_2, A_3 of A_4.

Voorbeeld 2

We bekijken nog een ander voorbeeld: $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ en $A = \{1, 2, 4\}$. We kiezen t_1 willekeurig: $t_1 = 3$. Dan is $A_1 = \{4, 5, 7\}$. Nu proberen we t_2 zo te kiezen, dat A_1 en A_2 disjunct zijn. Als we $t_2 = 1$ kiezen, krijgen we $A_2 = \{2, 3, 5\}$. Nu zijn A_1 en A_2 niet disjunct, omdat ze allebei 5 bevatten. We mogen ook niet $t_2 = 2$ kiezen, want dan is $A_2 = \{3, 4, 6\}$ en bevatten zowel A_1 als A_2 het getal 4. Als we $t_2 = 4$ kiezen, komt 5 in zowel A_1 als A_2 voor. Met $t_2 = 5$ komt 7 in zowel A_1 als A_2 voor. De getallen uit S mogen dus allemaal niet meer!

Waarom kunnen we in dit voorbeeld geen t_2 vinden, terwijl we in het vorige voorbeeld maar liefst t_1 tot en met t_4 konden vinden zodat de verzamelingen A_j disjunct zijn? We moeten t_2 zo kiezen dat $t_2 + 1$, $t_2 + 2$ en $t_2 + 4$ niet gelijk zijn aan 4, 5 en 7, dus aan $3 + 1$, $3 + 2$ en $3 + 4$. Anders gezegd, er mogen geen getallen a en b in A bestaan zodat $t_2 + a = 3 + b$. Dat betekent dat t_2 niet gelijk mag zijn aan $b - a + 3$, voor alle a en b in A. Als we alle mogelijke a en b proberen, zien we dat $b - a + 3$ een getal tussen 0 en 6 is (inclusief 0 en 6). Omdat alle getallen uit S al in dit rijtje voorkomen, kunnen we geen t_2 meer kiezen. Dat kunnen we ook zien ***in tabel 1***, waarin alle waarden staan die $b - a$ aanneemt, en alle waarden van $b - a + 3$. Hierin komen alle getallen uit S voor, dus kunnen we geen t_2 kiezen.

	b		
a	1	2	4
1	0	1	3
2	-1	0	2
4	-3	-2	0

	b		
a	1	2	4
1	3	4	6
2	2	3	5
4	0	1	3

tabel 1 Bij voorbeeld 2
links: de waarden die b – a aanneemt,
rechts: de waarden die b – a + 3 aanneemt

In het eerste voorbeeld mocht t2 niet gelijk zijn aan $b - a + 1$. In dit geval was $b - a$ altijd een even getal, namelijk 0, ±2, ±4 of ±6. Daarom was $b - a + 1$ altijd oneven, dus voor t_2 konden we elk even getal uit S kiezen. Er zijn zelfs nog meer mogelijkheden: 9 mocht ook. Het bijzondere aan deze verzameling A is dat $b - a$ weinig verschillende waarden aanneemt: de opeenvolgende getallen verschillen altijd 2, dus 2 komt meerdere malen voor als verschil. Hetzelfde geldt voor -4, -2, 0 en 4. Dat zien we ook als we weer een tabel maken met alle mogelijke waarden van $b - a$ en $b - a + 1$; ***zie tabel 2***.

	b			
a	2	4	6	8
2	0	2	4	6
4	-2	0	2	4
6	-4	-2	0	2
8	-6	-4	-2	0

	b			
a	2	4	6	8
2	1	3	5	7
4	-1	1	3	5
6	-3	-1	1	3
8	-5	-3	-1	1

tabel 2 Bij voorbeeld 1
links: de waarden die $b - a$ aanneemt,
rechts: de waarden die $b - a + 1$ aanneemt

Oplossing

Laten we nu proberen om de opgave op te lossen. Van de voorbeelden hebben we geleerd dat het aantal getallen dat het verschil is tussen twee getallen uit A belangrijk is. In het eerste voorbeeld waren er niet veel mogelijkheden voor het verschil van de getallen uit A. Daarom konden we daar meer t_j's vinden zodat de verzamelingen A_j disjunct zijn, dan in het tweede voorbeeld, waarin er veel meer mogelijkheden waren voor het verschil van de getallen uit A. Nu is A een gegeven, vaste verzameling, dus we kunnen er niet voor zorgen dat het aantal verschillen klein is. We moeten er dus rekening mee houden dat A heel ongunstig kan zijn.

Laten we de elementen van A een naam geven: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{101}\}$. De verzameling A_j bestaat dan uit de getallen $t_j + a_1, t_j + a_2, \ldots, t_j + a_{101}$. Nu gaan we $t_1, t_2, \ldots, t_{100}$ proberen te kiezen, zodat ieder nieuw getal t_j een verzameling A_j geeft die disjunct is met $A_1, \ldots, A_{j-1}$. Het idee is dat we gaan afschatten hoeveel getallen we niet meer als t_j mogen kiezen. Als er nog ten minste één mogelijkheid is voor t_j die wel mag (dus zodat A_j disjunct is met $A_1, \ldots, A_{j-1}$), dan kunnen we nog een t_j kiezen. We zouden kunnen proberen om de getallen slim te kiezen, zodat er nog veel mogelijkheden over zijn. Dat is echter moeilijk omdat we niets over A weten. Daarom kiezen we t_j willekeurig uit alle mogelijkheden die een A_j geven die disjunct is met de rest van de verzamelingen.

Voor t_1 kunnen we een willekeurig element van S kiezen. Nu willen we t_2 zo kiezen, dat er geen a_i en a_j zijn zodat $a_i + t_2 = a_j + t_1$; dus t_2 mag niet gelijk zijn aan $a_j - a_i + t_1$. We weten natuurlijk niet welke waarden $a_j - a_i + t_1$ aanneemt, maar dat is ook niet nodig: we hoeven alleen te weten hoeveel mogelijkheden voor t_2 we overhouden. Omdat A precies 101 elementen heeft, zijn er in totaal $101^2 = 10201$ mogelijke tweetallen (a_i, a_j) en dus hoogstens 10201 mogelijkheden voor $a_j - a_i$. Als we t_1 gekozen hebben, is t_1 een vast getal en zijn er dus ook hoogstens 10201 mogelijkheden voor $a_j - a_i + t_1$. We mogen t_2 niet gelijk aan een van deze (hoogstens) 10201 getallen kiezen (waarvan een aantal mogelijk niet eens in S liggen), maar dan zijn er nog minstens $1000000 - 10201 = 989799$ mogelijkheden voor t_2 in S over.

We kiezen t_2 gelijk aan een van deze minstens 989799 getallen, en proberen nu een t_3 te kiezen. Er mogen geen a_i en a_j zijn zodat $a_i + t_3 = a_j + t_1$ of $a_i + t_3 = a_j + t_2$. Dat betekent dat t_3 niet gelijk mag zijn aan $a_j - a_i + t_1$, en ook niet gelijk aan $a_j - a_i + t_2$. Daarom mogen er hoogstens $2 \cdot 10201 = 20402$ getallen niet voor t_3; dus er zijn nog minstens 979598 mogelijkheden over.

Nu proberen we dit ook te doen voor $t_4, t_5, \ldots, t_{100}$. Als we $t_1, \ldots, t_{k-l}$ al gekozen hebben, moeten we t_k zo kiezen, dat er geen a_i en a_j in A en t_l (met $l < k$) zijn zodat $a_i + t_k = a_j + t_l$. Daarom mag t_k niet gelijk zijn aan $a_j - a_i + t_l$. Voor iedere l neemt dit hoogstens 10201 waarden aan, en l loopt van 1 tot $k - 1$; dus in totaal zijn er hoogstens $10201(k - l)$ getallen waaraan t_k niet gelijk mag zijn. Zolang $10201(k - l)$ kleiner is dan 1000000, kunnen we dus een t_k kiezen. Het aantal mogelijkheden is natuurlijk het kleinst voor $k = 100$. Hiervoor mogen we $10201 \cdot 99 = 1009899$ getallen niet kiezen. Maar er zijn maar 1000000 getallen om uit te kiezen! Deze methode werkt dus niet helemaal: we moeten iets scherper schatten hoeveel getallen we niet meer mogen kiezen voor t_k.

Laten we nog eens kijken naar het *aantal* waarden dat $a_j - a_i$ kan aannemen. We hebben dit afgeschat op 101^2. Echter, als $i = j$ is $a_j - a_i = 0$. Eigenlijk zijn er dus minder mogelijkheden voor $a_j - a_i$: er zijn hoogstens $101 \cdot 100 = 10100$ mogelijkheden met $i \neq j$, en één mogelijkheid met $i = j$. In de tabellen bij de voorbeelden kunnen we dit ook al zien: op de diagonaal staan alleen nullen. In totaal neemt $a_j - a_i$ dus hoogstens 10101 waarden aan. Als we hiermee bovenstaande methode om $t_2, t_3, \ldots, t_{100}$ te kiezen herhalen, dan zien we dat er hoogstens $10101(k - 1)$ getallen zijn waaraan t_k niet gelijk mag zijn. Als we nu $k = 100$ nemen, zijn er hoogstens 999999 getallen die we niet mogen kiezen als t_{100}. Er is dus nog één mogelijkheid voor t_{100} over! Zelfs als we de getallen willekeurig kiezen, kunnen we dus nog een t_{100} kiezen. We kunnen de getallen $t_1, \ldots, t_{100}$ dus kiezen door steeds een willekeurig getal te nemen zodat A_j disjunct is met $A_1, \ldots, A_{j-1}$. Omdat we hebben laten zien dat er steeds nog zo'n getal bestaat, is het bewijs afgerond: we kunnen inderdaad getallen $t_1, t_2, \ldots, t_{100}$ kiezen zodat de verzamelingen $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ disjunct zijn.

Tot slot

En mijn hoop om een goede score te halen? Ik dacht dat ik deze opgave goed had en hoopte nog een punt voor opgave 2 te hebben; dus was ik tevreden over de eerste dag. Helaas bleek ik een foutje te hebben gemaakt in opgave 1: als ik het me goed herinner, was ik vergeten om het verschil $a_j - a_j = 0$ mee te tellen, zodat ik maar 10100 mogelijkheden voor $a_j - a_i + t_l$ had geteld. De tweede dag leverde maar 1 extra punt op, zodat mijn score tegenviel. Door de training wist ik wel beter hoe je zulke opgaven aan kunt pakken. Dat leverde niet alleen punten op bij de olympiade, maar is ook tijdens mijn studie goed van pas gekomen. Bovenal is de olympiade een mooie uitdaging voor leerlingen met interesse in wiskunde.

Voor mij was het een heel leuke ervaring om intensief en op hoog niveau met wiskunde bezig te zijn en andere leerlingen van over de hele wereld met dezelfde interesse te ontmoeten.

Info

Website IMO2011: *www.imo2011.nl*

Zie ook:

- Quintijn Puite (2010): *Van Bijsterveldt lanceert IMO2011*. In: *Euclides* 85(5), p. 209.
- Birgit van Dalen (2010): *Op weg naar IMO2011 / IMO2002 - Opgave 1*. In *Euclides* 85(5), pp. 210-211.

Over de auteur

Esther Bod heeft in 2002 en 2003 deelgenomen aan de *Internationale Wiskunde Olympiade* en in 2006 en 2007 aan de *International Mathematics Competition for University Students*. Daarnaast is ze als deelnemer en organisator betrokken geweest bij de *Landelijk Interuniversitaire Mathematische Olympiade*. Ze werkt als promovendus aan het Mathematisch Instituut van de Universiteit Utrecht.
E–mailadres: *E.Bod@uu.nl*

Decanteren en ggd

[Rob Bosch]

Inleiding

In de vorige aflevering van *Euclides* stond een mooi artikel van Hans Schipper (of misschien beter Hans Schipper en zijn leerlingen van het Baudartius College te Zutphen) met de titel *Decanteerproblemen in een Heraklesweek* [1], waarin hij verslag doet van de wijze waarop leerlingen van zijn school uitdagende problemen aanpakken en tot welke resultaten zij komen. In het artikel komt een probleem aan de orde waarbij met twee vaten waarvan de volumes A en B onderling priem zijn, een bepaalde hoeveelheid water moet worden afgemeten. Aangezien de vaten niet voorzien zijn van maatstrepen, beschikken we in eerste instantie slechts over de twee maten A en B. De vraag is nu welke hoeveelheden kunnen worden afgepast. Uiteraard kan zo'n hoeveelheid de capaciteit van het grootste vat niet overschrijden. In het genoemde artikel wordt hierover een stelling afgeleid. In deze reactie laten we zien dat het probleem en die stelling alles te maken hebben met de ggd van de volumes van de vaten. Omdat de inhoud van de vaten uiteraard positieve natuurlijke getallen zijn, beperken we ons in deze reactie tot dat type getallen.

De ggd

De *grootste gemene deler* (ggd) van twee natuurlijke getallen is het grootste getal dat deler is van beide getallen. Zo is bijvoorbeeld:
ggd(12, 16) = 4, ggd(21, 35) = 7 en ggd (18, 25) = 1.
Twee getallen waarvan de ggd gelijk is aan 1, heten *onderling priem* (ook wel relatief priem). Een fraaie eigenschap van de ggd van twee getallen is dat deze te schrijven is als lineaire combinatie van die getallen. Voor de bovenstaande voorbeelden vinden we de volgende lineaire combinaties:
ggd(16, 12) = 4 = 1 · 16 – 1 · 12
ggd(21, 35) = 7 = 2 · 21 – 1 · 35
ggd(18, 25)= 1 = 7 · 18 – 5 · 25
De volgende stelling laat zien dat de ggd van twee getallen altijd kan worden geschreven als lineaire combinatie van die getallen. Hoewel het resultaat voor gehele getallen (niet beide nul) geldt, beperken we ons – zoals gezegd – tot positieve natuurlijke getallen. De algemene stelling en het bewijs daarvan kan de lezer onder andere vinden in het boek van Burton [2]. We volgen hier de lijn van het in dat boek gegeven bewijs.

Stelling 1. *Laten a en b positieve natuurlijke getallen zijn, dan bestaan er gehele getallen x en y zodat* ggd(a, b)= $x \cdot a + y \cdot b$.
Bewijs. We bekijken de verzameling S van alle positieve lineaire combinaties van a en b, dat wil zeggen:
$S = \{u \cdot a + v \cdot b \mid ua + vb > 0$, met u, v geheel$\}$
We merken op dat de verzameling S niet leeg is. Nemen we u = 1 en v = 0, dan zien we dat a element is van S. Een niet-lege verzameling natuurlijke getallen bevat uiteraard (volgens het *welordeningsprincipe*) een *kleinste* element d. Er bestaan dus gehele getallen x en y waarvoor $d = xa + yb$.
In het vervolg tonen we aan dat d = ggd(a, b).
Met het algoritme van Euclides (delen met rest) kunnen we a schrijven als:
$a = qd + r$, met $0 \leq r < d$
De rest r kan geschreven worden als:

$$\begin{aligned} r &= a - qd = a - q(xa + yb) \\ &= (1 - qx)a + (\text{-}qy)b \end{aligned}$$

Deze rest r kan, in dit geval, niet positief zijn, want dan is:
$0 < r = (1 - qx)a + (\text{-}qy)b < d$ en r is daarmee een element van S dat kleiner is dan d, en dat is in tegenspraak met het feit dat d het kleinste element is in S.
Dus is r = 0, wat betekent dat $a = qd$, met andere woorden d is een deler van a. Op dezelfde wijze kunnen we aantonen dat d een deler is van b. De lineaire combinatie $d = xa + yb$ is dus een gemeenschappelijke deler van a en b.
Als c een gemeenschappelijke deler is van a en b, dan deelt c ook $d = xa + yb$. Iedere gemeenschappelijke deler c van a en b is dus kleiner dan of gelijk aan d. Waaruit volgt dat d = ggd(a, b). ◊

Voor twee getallen a en b die onderling priem zijn, geldt dus het volgende:
Corollarium 1. *Laten a en b positieve natuurlijke getallen zijn met* ggd(a, b) = 1, *dan bestaan er gehele getallen x en y zodat $xa + yb$* = 1.
Ter illustratie van deze stelling nog enkele voorbeelden:

$$\begin{aligned} \text{ggd}(16, 28) = 4 &= 2 \cdot 16 - 1 \cdot 28 \\ &= \text{-}5 \cdot 16 + 3 \cdot 28 \\ \text{ggd}(35, 14) = 7 &= 1 \cdot 35 - 2 \cdot 14 \\ &= 3 \cdot 35 - 7 \cdot 14 \\ \text{ggd}(11, 35) = 1 &= 16 \cdot 11 - 5 \cdot 35 \\ &= \text{-}19 \cdot 11 + 6 \cdot 35 \end{aligned}$$

Uit deze voorbeelden zien we dat de ggd van twee getallen weliswaar geschreven kan worden als een lineaire combinatie van deze getallen, maar dat die combinatie niet uniek is; dat wil zeggen dat de ggd op *meerdere manieren* als lineaire combinatie van deze getallen kan worden geschreven.

Decanteren

In deze paragraaf passen we Corollarium 1 toe op een decanteerprobleem. Gegeven zijn een onuitputtelijke waterbron en twee vaten waarvan de volumes respectievelijk 8 en 5 liter zijn. Gevraagd wordt om met deze twee vaten precies 1 liter af te meten. We merken op dat 8 en 5 onderling priem zijn en dat 1 als lineaire combinatie van 8 en 5 te schrijven is:
ggd(8, 5) = 1 = 2 · 8 – 3 · 5
Deze lineaire combinatie vertelt ons dat als we uit 2 vaten van 8 liter, 3 vaten van 5 liter halen, er 1 liter overblijft in een vat van 8 liter.
We gaan dit even na in de overzichtelijke situatie waarin we beschikken over 2 gevulde vaten van 8 liter en 3 lege vaten van 5 liter. We gieten het water uit het eerste vat van 8 liter over in de vaten van 5 liter. Daarna is er 1 vat van 5 liter gevuld en een tweede vat van 5 liter bevat dan 3 liter. Het tweede vat van 8 liter gieten we nu over in de twee nog niet gevulde vaten van 5 liter. In het tweede vat van 5 liter gieten we nog 2 liter en daarna vullen we het derde vat van 5 liter, waarna er 1 liter in het tweede vat van 8 liter overblijft. De gevolgde methode kan als volgt worden weergegeven:

8 liter vaten		5 liter vaten		
vat 1	vat 2	vat 1	vat 2	vat 3
8	8	0	0	0
0	8	5	3	0
0	1	5	5	5

De lezer kan terecht opmerken dat we in het oorspronkelijke probleem slechts beschikken over twee vaten: één van 8 liter en één van 5 liter, en dat de bovenstaande methode dus niet van toepassing is op het probleem van de twee vaten. We kunnen onze variant echter eenvoudig vertalen naar de situatie waarin we over slechts twee vaten beschikken. Nadat het eerste vat van 8 liter geleegd is, vullen we deze weer en vatten dit op als het tweede vat. Evenzo, als een vat van 5 liter gevuld is, legen we deze en vatten het lege vat op als het tweede van

de drie 5 liter vaten. We kunnen het bovenstaande schema dan als volgt opschrijven:

8 liter vat	5 liter vat
8	0
3	5
3	0
0	3
8	3
6	5
6	0
1	5

We geven nog een probleem waarbij de laatste liter overblijft in het kleinste vat. We nemen hiervoor een vat van 7 liter en een 5 liter vat waarmee we dan weer 1 liter moeten afmeten. De ggd van 7 en 5 is weer 1, zodat we 1 kunnen schrijven als lineaire combinatie van de getallen 7 en 5. Dat doen we als volgt:

ggd(7, 5) = 1 = -2 · 7 + 3 · 5

De lineaire combinatie vertelt ons dat als we uit 3 vaten van 5 liter, 2 vaten van 7 liter halen er 1 liter overblijft in een vat van 5 liter, zoals uit het volgende schema duidelijk wordt:

7 liter vaten		5 liter vaten		
vat 1	vat 2	vat 1	vat 2	vat 3
0	0	5	5	5
5	0	0	5	5
7	3	0	0	5
7	7	0	0	1

Maken we de overstap naar het probleem van slechts één vat van 7 liter en één vat van 5 liter, dan is het schema als volgt:

7 liter vat	5 liter vat
0	5
5	0
5	5
7	3
0	3
3	0
3	5
7	1

Decanteren in meerdere ronden

In de vorige paragraaf hebben we laten zien dat, op grond van de stelling over de ggd, het altijd mogelijk is met twee vaten waarvan de volumes onderling priem zijn 1 liter af te meten. Op basis daarvan is het eenvoudig in te zien dat we in zo'n geval ook 2, 3, … liters kunnen afpassen, uiteraard met de restrictie dat het aantal liters de capaciteit van het grootste vat niet overschrijdt. Dit kunnen we bewerkstelligen door de methode uit de vorige paragraaf een aantal keren toe te passen. Het probleem van het afpassen van 2 liter met een vat van 8 liter en een vat van 5 liter behandelen we nu in twee stappen. We hadden al gevonden dat:

2 · 8 – 3 · 5 = 1

Door beide leden van de gelijkheid te vermenigvuldigen met 2 krijgen we

4 · 8 – 6 · 5 = 2

In termen van het decanteerprobleem betekent dit dat als we uit 4 vaten van 8 liter 6 vaten van 5 liter halen, we 2 liter in het laatste vat van 8 liter overhouden. Het volgende schema laat dat zien:

	8 liter vaten				5 liter vaten					
vat.	1	2	3	4	1	2	3	4	5	6
	8	8	8	8	0	0	0	0	0	0
	0	8	8	8	5	3	0	0	0	0
	0	0	8	8	5	5	5	1	0	0
	0	0	0	8	5	5	5	5	4	0
	0	0	0	2	5	5	5	5	5	5

Vertalen we deze methode naar de situatie met slechts twee vaten, dan krijgen we het schema:

	8 liter vat	5 liter vat
ronde 1	8	0
	3	5
	3	0
	0	3
ronde 2	8	3
	6	5
	6	0
	1	5
	1	0
	0	1
ronde 3	8	1
	4	5
	4	0
	0	4
ronde 4	8	4
	7	5
	7	0
	2	5

Het bovenstaande schema kan wat korter worden opgeschreven als we de regels waarin we een vol vat legen of een leeg vat vullen, weglaten.

Om 3 liter over te houden gaan we als volgt te werk:

2 · 8 – 3 · 5 = 1

We vermenigvuldigen beide leden van de gelijkheid met 3 en krijgen zo:

6 · 8 – 9 · 5 = 3

Door uit 6 vaten van 8 liter, 9 vaten van 5 liter te halen bereiken we de situatie waarbij in het laatste vat van 8 liter, 3 liter overblijft. De lezer gaat zelf gemakkelijk na dat we op eenzelfde wijze 4, 5, 6 of 7 liter kunnen overhouden. Corollarium 1 leidt zo tot de stelling die door het Baudartius College in [1] is gevonden. We nemen deze stelling hieronder over.

Stelling 2. *Als zijn gegeven een onuitputtelijke waterbron en twee kannen met inhouden A en B (in hele liters), waarbij A en B onderling priem zijn en A > B, dan kan iedere hoeveelheid Q (in hele liters) met* $0 \le Q \le A$ *worden afgemeten.*

De kritische lezer merkt misschien op dat de voorgaande argumenten niet geheel toereikend zijn om uit Corollarium 1 tot Stelling 2 te besluiten. Immers in het voorbeeld van een vat van 7 liter en een vat van 5 liter bleef de af te meten hoeveelheid in het kleinste vat over. Het is daarom niet geheel duidelijk of we in dit geval ook 6 liter kunnen afmeten. We merken ten aanzien van deze schijnbare onvolkomenheid echter op dat het schrijven van de ggd als lineaire combinatie niet uniek is. Zo hadden we in dit geval ook kunnen schrijven:

ggd(7, 5) = 1 = 3 · 7 – 4 · 5

Als we nu uit 3 vaten van 7 liter, 4 vaten van 5 liter scheppen, dan blijft er 1 liter in het grootste vat over. Door een geschikte vermenigvuldiging te kiezen kunnen we nu iedere hoeveelheid in het grootste vat laten overblijven (uiteraard weer met de restrictie van de capaciteit).

We kunnen altijd een lineaire combinatie kiezen waarbij de rest in het grootste vat overblijft. Stel dat $a > b$; dan weten we dat er gehele getallen x en y zijn waarvoor:

ggd(a, b) = 1 = $xa + yb$, met x, y geheel

We kunnen altijd een lineaire combinatie kiezen waarbij de rest in het grootste vat overblijft. Stel dat $a > b$; dan weten we dat er gehele getallen x en y zijn waarvoor:

ggd(a, b) = 1 = $xa + yb$, met x, y geheel

We kunnen deze lineaire combinatie ook schrijven als:

$$xa + yb = 1 = (x + tb)a + (y - ta)b$$
$$= xa + by + tba - tab$$

met x, y, t geheel.

Kies nu een t waarvoor $x + tb > 0$; aangezien $b > 0$ is dat altijd mogelijk. Voor $y - ta$ moet nu gelden $y - ta < 0$.

In de vertaling naar het decanteerprobleem betekent dit dat de hoeveelheid water in de grootste vaten groter is dan het totale volume van de kleinste vaten. Het resterende water blijft dus over in het grootste vat. Waarmee duidelijk is dat we iedere hoeveelheid kleiner dan de capaciteit van het grootste vat kunnen afmeten. Daarmee hebben we aangetoond dat Corollarium 1 leidt tot Stelling 2.

Met volumes onderling niet-priem

We bespreken nog kort een decanteerprobleem waarbij de volumes van de twee vaten onderling *niet*-priem zijn. We nemen hiervoor een vat van 6 liter en een vat van 15 liter en vragen ons af of we een hoeveelheid van 9 liter kunnen afmeten. Stelling 1 zegt dat we de ggd(15, 6) = 3 kunnen schrijven als lineaire combinatie van de getallen 15 en 6; bijvoorbeeld als:

ggd(15, 6) = 3 = 1 · 15 – 2 · 6

Vermenigvuldigen van beide leden van de gelijkheid met 3 geeft:

3 · 15 – 6 · 6 = 9

Halen we uit 3 vaten van 15 liter, 6 vaten van 6 liter dan resteert in een vat van 15 liter 9 liter. Wellicht ten overvloede geven we het bijbehorende schema:

	15 liter vaten			6 liter vaten					
vat	1	2	3	1	2	3	4	5	6
	15	15	15	0	0	0	0	0	0
	0	15	15	6	6	3	0	0	0
	0	0	15	6	6	6	6	6	0
	0	0	9	6	6	6	6	6	6

De vertaling naar het twee-vatenprobleem laten we aan de lezer over.
We sluiten af met een vraagje. Kan in dit geval ook 8 liter worden afgemeten? Zo ja, hoe? En zo nee, waarom niet?

Literatuur

[1] Hans Schipper (2010): *Decanteerproblemen in een Heraklesweek*. In: *Euclides* 85(5); pp. 199-202.

[2] David M. Burton (2007): *Elementary Number Theory*. McGraw-Hill Companies (sixth edition).

Over de auteur

Rob Bosch is universitair hoofddocent wiskunde en statistiek aan de Nederlandse Defensie Academie in Breda. Daarnaast is hij redacteur van *Euclides*.
E-mailadres: *robbosch@live.nl*



Rectificatie Euclides 85-5

In het artikel *Viervlakken tussen Kunst en Wiskunde* van Ton Konings (pp. 194-198) ontbrak foto 12. Die plaatsen we hierbij alsnog.

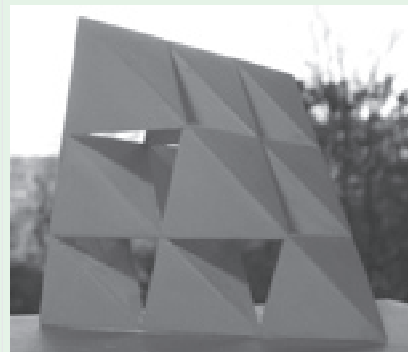


foto 12 Viervlak 7

En, de rechter kolom op pagina 198 dient te beginnen met de woorden:
"wiskunde. De wiskundige kiest daarbij een ander deur naar de wereld van de vormen".

Complexe getallen voor Wiskunde D en NLT

[Henk Broer en Kees van der Straaten]

Doel van dit artikel is de bespreking van een drietal recente teksten, te weten:

- J. van de Craats: *Complexe getallen voor Wiskunde D* [1];
- R.A.C. Dames, H. van Gendt: *Complexe getallen in context, voor Wiskunde D* (*5 VWO*) [2];
- Hans Sterk e.a.: *Wat? Nog meer getallen!* [7].

Deze bespreking doen we in het licht van een aantal 'klassieke' teksten, die straks eerst ten tonele worden gevoerd.

Complexe getallen zijn al een paar eeuwen aan de mensheid bekend. Ze hebben iets intrigerends, want hoewel er enige problemen waren aangaande de fundamenten, was er grote behoefte aan de mogelijkheden er mee te kunnen rekenen. De behoeften gaan al terug naar de 14e eeuw bij het rekenen aan de derde- en vierdegraads vergelijking.
Het was Gauß die het complexe vlak haar bekendheid bracht en daarmee de formele problemen oploste: het zo imaginaire getal *i* bestaat gewoonweg. Inmiddels heeft het complexe vlak en de theorie van analytische functies een hoge vlucht genomen; het vormt een prachtig deel van de grote calculus-analyse symfonie. Deze complexe analyse was en is zeer van belang voor de ontwikkeling van de mathematische fysica, waaronder de theorie van trillingen en elektrische netwerken, al was het alleen al doordat zo een handig notatieapparaat ontstaat, waarin je zo heerlijk efficiënt kunt rekenen.
Complexe getallen zijn een verplicht onderdeel van het schoolmodel wiskunde D op het vwo. In de praktijk blijkt dat veel scholen die het samenwerkingsmodel boven het schoolmodel verkiezen, ook complexe getallen in het programma opnemen. De connectie met mathematische fysica levert interessante mogelijkheden voor het vak NLT.

Overzicht van het onderwerp 'complexe getallen'

We geven een indruk van de onderwerpen die zoal aan de orde kunnen komen en komen in het kader van wiskunde D en die ook duidelijk aangeven waarom complexe getallen zo interessant zijn. De beide auteurs herinneren zich overigens dat dit overzicht zich pas aan hen ontvouwd heeft gedurende de eerste jaren van hun universitaire studie, maar goed. Het getal *i* treedt dus op als oplossing van de vergelijking $x^2 + 1 = 0$, en dan blijkt dat je opeens alle vierkantsvergelijkingen kunt oplossen. Verder heb je de spectaculaire formule van Euler:

(1)… $e^{iy} = \cos y + i \sin y$

ofwel:

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

en, daarmee samenhangend, de Stelling van De Moivre:

(2)… $(\cos y + i \sin y)^n = \cos(ny) + i \sin(ny)$

waarna de formulekaart met goniometrische gelijkheden onverwijld kan worden weggegooid. Hierachter kan het mooie geheim van de complexe *e*-macht en de additieformule:

(3)… $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$

schuilgaan, iets wat natuurlijk wel vermeld mag worden! Een ander geheim is de Hoofdstelling van de Algebra, die zegt dat een complex polynoom van de graad n precies n wortels heeft (multipliciteit meegerekend). Dit betekent dat niet alleen kwadratische, maar alle polynomiale vergelijkingen oplossingen hebben, alleen ligt ook dit niet langer in de sfeer van rekenen. Zo is er meer, bijvoorbeeld vlakke analytische meetkunde, die een extra tool heeft in de complexe vermenigvuldiging: vermenigvuldig je, bijvoorbeeld, een lijnstuk of een driehoek met i dan roteert dit geheel 90° om de oorsprong. Een stapje verder beschouwt men complexe functies als transformaties van het vlak. Allerlei mogelijkheden dienen zich aan, zoals de M¨obius (of gebroken lineaire) transformaties, de complexe *e*-macht (en logaritme), maar ook de iteratie van kwadratische afbeeldingen met de bijbehorende Julia- en Mandelbrotverzamelingen. Ook interessant zijn de gehelen van Gauß, waarbij blijkt dat $13 = (2 + 3i)(2 - 3i)$ opeens geen priemgetal meer is. Een schier onuitputtelijke bron van 'contexten' komt uit de mathematische fysica waar complexe notatie uiterst handig is voor berekeningen; men denke hierbij allereerst aan trillingen en aan elektrische netwerken met complexe impedanties. Lineaire differentie- (of recursie-) en differentiaalvergelijkingen kunnen hier een interessant tussenstation vormen.
We merken op dat het examenprogramma vwo een 'minimum' voorschrijft: rekenen met complexe getallen, de geconjugeerde, het argument en de absolute waarde, de formule van Euler en stelling van De Moivre, en een profielspecifieke verdieping.

Tekstbespreking

Als gezegd is het doel van dit artikel de recente teksten [1, 2, 7] te bespreken, alle geschreven ten behoeve van wiskunde D. In ons achterhoofd hebben we hierbij 'klassieker' werk: *Complexe getallen* van Freudenthal-Nijdam [4] en de Getal&Ruimte-zebra *Complexe getallen* van Vuijck [8].
Om te beginnen zij opgemerkt dat alle teksten [1, 2, 4, 7, 8] een greep vormen uit bovengenoemd materiaal, waarbij, behalve verschillende keuzen hierin, ook verschillen optreden in de opbouw en de mate van wiskundige strengheid. In een aantal teksten staat het rekenwerk voorop en wordt een algebraïsche aanpak gekozen: aan het lichaam $\mathbb{R}$ wordt – op enigszins heuristische wijze – de wortel $\sqrt{-1}$ toegevoegd.[a]
Een ontologisch iets veiliger aanpak komt meteen met het complexe vlak aanzetten, waarbij men op het vlak $\mathbb{R}^2$ met coördinaten *a* en *b* schrijft $(a, b) \leftrightarrow a + ib$, zodat het getal *i* correspondeert met $(a, b) = (0, 1)$. Hierdoor kan het rekenwerk van meet af aan gelardeerd worden met meetkundige interpretaties.

De 'klassieke' teksten

We beginnen met Freudenthal-Nijdam [4]. Dit is nog een ouderwets degelijke tekst, die na enig gereken met het complexe vlak op de proppen komt, daarna met de lichaamseigenschappen en enige theorie van complexe functies en hun grafische

interpretatie, waarna volledige hoofdstukken volgen over respectievelijk Möbius-transformaties en exponentiële functies. Bij het laatstgenoemde onderwerp worden de formules:
(4)…

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \;,\; e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

kort aangestipt ('... met enige hogere wiskunde kan men bewijzen…'). Het werk eindigt met twee hoofdstukken elektrische trillingsketens en gedempte trillingen. De G&R-zebra [8] vanVuijk overdekt ruwweg dezelfde stof, alleen zonder Möbius-transformaties en het massa-veer systeem, maar juist weer wel met toepassingen op de derdegraads vergelijking. Deze tekst is iets speelser dan [4] en gebruikt ook reeds een website met programma's om de Mandelbrot-verzameling te tekenen. Ook verschijnt de grafische rekenmachine hier op een bescheiden wijze ten tonele.

De 'moderne' teksten

Hieronder volgt een korte indruk van de drie teksten [1, 2, 7] waar het in dit artikel eigenlijk om gaat.

Complexe getallen – [1]

Na enig gereken en de *abc*-formule verschijnt het complexe vlak ten tonele, wordt het getal i ingevoerd en worden de lichaams-eigenschappen afgeleid. Hierna staat de deur open voor de meetkunde van het complexe rekenen, met speciale aandacht voor de complexe eenheidscirkel, de formule van Euler (1) en de complexe functie $e^z = e^x \cdot e^{iy}$ (als $z = x + iy$ met x en y reëel) en daarna ook nog cos z en sin z.
Alles wordt netjes afgeleid uit goniometrische betrekkingen en zonder gebruik van reeksen. De additieformule (3) wordt nu ook bewezen, waarna de formule van De Moivre (2) nog slechts een sommetje zou zijn geweest. Misschien een suggestie voor een volgende versie van de tekst?
Hierna komen wortels en polynomen aan de orde en wordt de Hoofdstelling van de Algebra vermeld. Wij waren hier aangenaam getroffen door de staartdeling van complexe polynomen. Dan volgen lineaire recurrente betrekkingen van de eerste, tweede en van hogere orde, de reeks van Fibonacci. Dit is een uitbreiding van wat al bestaat. Hierna nog lineaire differentiaalvergelijkingen van eerste, tweede en hogere orde met toepassing op het massa-veer systeem en het elektrisch circuit. Beide onderwerpen worden afgesloten met een discussie over realistische modellen, waarbij ook een interessant economisch voorbeeld ter sprake komt.
Wij vonden deze tekst wiskundig transparant en goed afgewogen, met een lichte *overkill* aan sommen. De toepassingen en voorbeelden komen aan het eind. Het totaal is een zeer gedegen werk en het lijkt ons een uiterst bruikbaar!

Complexe getallen in context – [2]

Het complexe vlak (eerst de imaginaire getallen) wordt tamelijk snel ingevoerd met de noodzakelijke algebra (de lichaams-eigenschappen). Daarna poolcoördinaten en de formule van Euler (1), in eerste instantie als feit. Vervolgens vermenigvuldigen, delen en machtsverheffen waarbij uiteraard uitvoerig gebruik gemaakt wordt van die poolcoördinaten. Er wordt vervolgd met wiskundige toepassingen van bovenstaande: complex worteltrekken, logaritmen en de Hoofdstelling van de Algebra als behartenswaardig feit. Verder de theorie van eerste en tweede orde lineaire differentiaalvergelijkingen.
Het hoofdstuk 'Formules bewijzen' is optioneel. Hier worden de formele Maclaurin (Taylor)-reeksen behandeld, afhankelijk van een reële veranderlijke, en met toepassingen op e^x, sin x en cos x; vergelijk met de formules (4). Van de mogelijkheid van benadering met eindige stukken reeks wordt als feit vermeld dat met de rekenmachine gecontroleerd kan worden. Hierna wordt een bewijs gesuggereerd van de Euler-formule (1) door met de drie genoemde reeksen te manipuleren. Hier zit wel het onvermelde geheim achter dat de reeks in (4), onder meer, ook geldt als $x = i\varphi$, met φ reëel. De formule van De Moivre (2) wordt dan weer keurig met goniometrische formules en volledige inductie bewezen. De tekst eindigt met een aantal hoofdstukken over differentiaalvergelijkingen in de natuurkunde, zoals het massa-veer systeem en de RCL-schakeling. Hier komt de mooie successtory van de complexe impedanties en het bijbehorende rekenen aan de orde, de RCL-schakeling als filter en verder nog twee appendices over dit complexe rekenen.
Dit werk bevat een goed in de tijdgeest passende inleiding waarbij de leerling gevraagd wordt op het internet van de formules van Euler (1) en De Moivre (2) een bewijs te zoeken. Deze en andere onderzoeksvragen, onder meer betreffende massaveersystemen en de RCL-serieschakeling, worden later in de tekst nader uitgewerkt. Het geheel is minder gericht op de wiskundige structuur, maar meer op de toepassingen. Hierbij wordt een grote nadruk gelegd op de context van de RCL-schakeling met de bijbehorende complexe rekenwijze.
Wij vroegen ons af in hoeverre, gegeven de stand van zaken binnen het vwo-natuurkundeonderwijs, de huidige vwo-leerling deze nadruk zou kunnen appreciëren. Valt hier misschien toch meer te denken aan een verdieping in het kader van NLT? Vergelijk ook de fraaie tekst van Van Hoof [5], die juist met het oog op dit punt een zeer goede opbouw heeft.

Wat? Nog meer getallen! – [7]

Deze tekst begint vanuit de algebra en de vraag hoe de getalsystemen stelselmatig kunnen worden uitgebreid. Zo ontstaat de rij inclusies:
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}[\sqrt{-1}]$
waarbij het getal tussen [en] de vierkantswortel is die aan het lichaam wordt toegevoegd.[b] Hierbij wordt 'voor de preciezen' ook het bewijs opgenomen dat $\sqrt{2}$ irrationaal is.
Bij het vereenvoudigen van de formules van Cardano, die optreden in de context van de derdegraads vergelijking $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, blijkt het getal i ook erg handig te zijn; zover bekend is dit historisch de eerste gelegenheid waarbij de complexe getallen opdoken. Dan wordt de rekenkunde van $\mathbb{C}$ min of meer systematisch opgezet, waarna in hoofdstuk 4 het complexe vlak wordt ingevoerd, ook met poolcoördinaten. Hier komt de *abc*-formule ten tonele, gelukkig in verband met kwadraat afsplitsen. Verder de Hoofdstelling van de Algebra [c]. Aardig is ook hier een staartdeling van complexe polynomen. In hoofdstuk 5 komt de complexe *e*-macht aan de orde, gedefinieerd door (1), waarna toegewerkt wordt naar de additieformule (3), in principe op dezelfde manier als in [1]. Expliciet wordt hier de oogst binnengehaald van het feit dat nu de gonioformules aanzienlijk eenvoudiger zijn af te leiden. De formule (2) wordt echter niet expliciet genoemd. Ook wordt kort aandacht besteed aan tweede orde lineaire differentiaalvergelijkingen. Er

volgt een aardig hoofdstuk over analytische meetkunde op het complexe vlak, met, onder andere, de stelling van Napoleon. Daarna komen de gehelen van Gauß aan de orde, waaronder natuurlijk de bijbehorende priemgetallen en vervolgens, kort, de quaternionen van Hamilton. De tekst besluit met een, eveneens kort, hoofdstukje over fractals waarbij iteraties:

$z_{n+1} = z_n^2 + c \quad (n = 0,1,2,\ldots)$

worden beschouwd, hetgeen dan leidt tot Julia-verzamelingen in het z-vlak en tot de Mandelbrot-verzameling in het c-vlak.
Wij vonden dit een rijke tekst, die hier en daar iets preciezer had gekund. De nadruk van de extra dingen ligt vooral in de wiskunde en op te merken valt dat ook hier een aantal van de onderwerpen (Gauß-priemen, fractals) wel enigszins geïsoleerd zijn in het totale curriculum. Niettemin zitten hier wellicht aardige profielwerkstukken in.

Conclusies

Alle teksten zijn zonder meer bruikbaar, zeker in de handen van de goed ingevoerde leraar; dit geldt ook zonder meer voor de 'klassieke' teksten [4, 8]. In feite zou je wensen dat de leraar al het materiaal ter beschikking had, dit ter inspiratie. Dit geldt eveneens voor toepassingen in NLT, met name wat betreft de elektrische netwerken (zie hiervoor ook Van Hoof [5]). Over het algemeen is de hoeveelheid materiaal aan de ruime kant en zullen er dus keuzes gemaakt moeten worden.
Tot slot merken we op dat 'de schoolboeken' ook hoofdstukken wiskunde D hebben, waarin aandacht besteed wordt aan complexe getallen.

Dank

Met dank aan Wout de Goede, Martinus van Hoorn en Theo van den Bogaart voor zinvolle discussie.

Referenties

[1] J. van de Craats (2008): *Complexe getallen voor Wiskunde D*. Gratis internetboek; herziene versie. Downloadbaar via *http://staff.science.uva.nl/ craats*.
[2] R.A.C. Dames, H. van Gendt: *Complexe getallen in context, voor Wiskunde D (5 VWO)*. Versie 3, in opdracht van cTWO, mei 2009. Downloadbaar via *www.ctwo.nl*.
[3] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands (1963): *The Feynman Lectures on Physics*, Volume I. Reading MA (USA): Addison-Wesley Publishing Co. Inc.
[4] H. Freudenthal, B. Nijdam (1977): *Complexe getallen*. Utrecht: IOWO; derde geheel herziene druk.
[5] J. van Hoof, A. Goddijn, T. van der Valk (2007): *Complexe stromen; een module natuurkunde en wiskunde over wisselstroomschakelingen en complexe getallen*. Utrecht: Junior College / vwo-6 NT en NG.
[6] Frans Keune (2009): *Getallen, van natuurlijk naar imaginair*. Utrecht: Epsilon Uitgaven; nummer 65.
[7] Hans Sterk e.a. (2009): *Wat? Nog meer getallen! / Complexe getallen en toepassingen / Wiskunde D*. Eindhoven: TU/e. Downloadbaar via *www.win.tue.nl/ wiskunde*.
[8] R.A.J. Vuijk e.a. (2001): *Complexe getallen*. Houten: EPN; Getal&Ruimte-zebra.

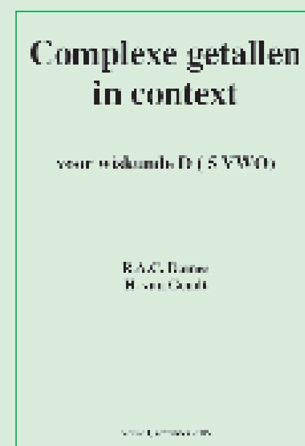
Noten

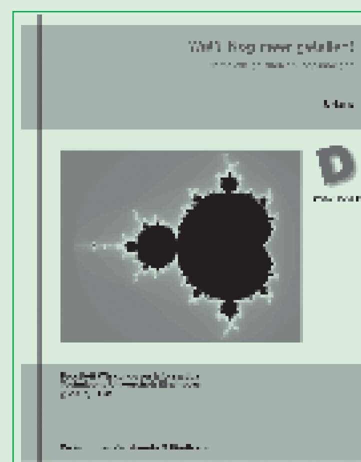
[a] Hoofdstuk 22 van Feynman (zie [3]), getiteld 'Algebra', geeft in tien bladzijden een uiterst leesbaar overzicht van de getalsystemen, uitgaand van de gehelen. De liefhebber zal hier ook een elegante manier aantreffen om het getal e te karakteriseren.
[b] Zie voor wiskundige achtergrond onder meer [6].
[c] In de docentenhandleiding wordt hiervan een bewijs geschetst!

Over de auteurs

Henk Broer is hoogleraar wiskunde aan de Rijksuniversiteit Groningen en lid van cTWO.
E-mailadres: *H.W.Broer@rug.nl*
Kees van der Straaten is leraar aan het Praediniusgymnasium te Groningen.
E-mailadres: *k.vd.straaten@praedinius.nl*







De 8e Wiskunde-conferentie voor docenten wiskunde

IN HET VMBO EN DE ONDERBOUW HAVO/VWO

[Gert de Kleuver]

Een heel inspirerende dag, zo is in een paar woorden de samenvatting van de 8e Wiskundeconferentie (gehouden op 27 januari 2010), oftewel de Reehorst-conferentie, te Utrecht.

Mooi programma

Lambrecht Spijkerboer heette namens de organisatie iedereen hartelijk welkom. De opkomst was vergelijkbaar met die van vorig jaar: 110 bezoekers. Natuurlijk werd uitgekeken naar de eerste inschrijver, maar deze werd niet bekend gemaakt dit jaar. De bekende bos bloemen bleef achterwege. Vergeten? Of speelt ook hier de kredietcrisis een rol?
Het programma van de dag zag er in de folder zeer goed uit: afwisselend en voor de verschillende doelgroepen mooi verdeeld. Nu is papier geduldig en dus was het even afwachten wat er van terecht gekomen was. Een belangrijke workshop ging niet door: de workshop over de digitale examens voor leerlingen-KB, die gehouden zou worden door iemand van het Cito, werd op het laatste moment afgeblazen door het College voor Examens. Jammer, want er waren juist veel docenten uit de doelgroep aanwezig. Gelukkig bleef er genoeg te kiezen over. Ik kan natuurlijk niet alle presentaties en workshops noemen, maar een paar wil ik onder uw aandacht brengen.

Didactiek met het digibord

De openingslezing met als titel ‘Didactiek met het digibord bij wiskunde’ werd door Michel van Ast verzorgd. Voor velen is een digibord niet anders dan een white bord. Michel liet met een paar eenvoudige voorbeelden zien dat er heel veel meer mee te doen is. Het belangrijkste is voor mij toch echt dat het digitale bord meerwaarde heeft tijdens de uitleg van leerstof. Michel liet zien dat het heel goed te gebruiken is om leerlingen actiever mee te laten doen tijdens de les. Het gebruikt van een digitaal bord kost vraagt wel een andere didactische aanpak dan een les met een krijtjesbord. Later op de dag heb ik ook de workshop van het digitale bord meegemaakt en werd het me duidelijk dat in lesvoorbereiding heel veel tijd gaat zitten. Via het maken van een *mindmap* werd inzichtelijk wat er met een digitaal bord te doen is. Veel aandacht kreeg het invoeringstraject. De ideale manier hiervoor blijkt het werken met de collega als trainer. Voorbeeld: vier docenten worden zeer goed getraind in het gebruik van het digitale bord. Deze vier docenten treden dan op hun school op als trainer voor andere collega’s. Zo heb je op redelijk korte tijd een groot aantal collega’s die op een goede manier met zo’n bord kunnen werken. Belangrijk item blijft echt dat men gaat samenwerken. Je kunt echt niet alles zelf en alleen maken.

Rekenbeleid

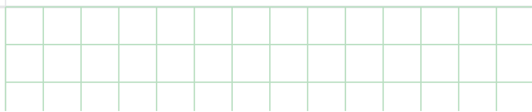
Rekenbeleid, het onderwerp van een presentatie verzorgd door Martin van Reeuwijk. Hoe voer je een rekenbeleid in op school en waar staat jouw school nu? Voor sommige collega’s was deze presentatie een echte eye-opener: menigeen had nog nooit van de *kwaliteitsgelden* gehoord. Iedere school heeft afgelopen jaren per leerling ruim 50 euro ontvangen. Hoe worden die gelden bij u op school ingezet? Naast deze informatie gaf Martin ook tips om tot een consistent beleidsplan te komen. Zijn leidraad is het nieuwe boekje van het APS: *Rekenen in het voortgezet onderwijs. Waarom? Wat? Hoe?*
Natuurlijk is het belangrijk op school te komen tot een visiestuk over rekenen en taal. Op veel scholen wordt gekeken naar de sectie wiskunde om het rekenen te onderhouden, maar ook bij andere vakken wordt gerekend. Neem een vak als economie of natuurkunde. Samenwerken met andere vaksecties lijkt het motto, want op vele scholen zal rekenen niet als apart vak op het rooster worden gezet.

Voorkennis document

Niet onvermeld mag blijven de workshop van Peter van Wijk over het cTWO-project. Naast het werken aan programmavoorstellen voor de nieuwe wiskunde examenprogramma’s voor de Tweede fase, inventariseert cTWO de voorkennis die leerlingen aan het eind van de derde klas van de havo en vwo behoren te hebben om een goede aansluiting te krijgen met de nieuwe programma’s. Daartoe wordt er een voorkennisdocument opgesteld. Van Wijk beschreef dat er met de groep van cTWO en SLO hierover erg veel uitgewisseld wordt. Inhoudelijk is veel te vinden op de website van cTWO. Ook op de website van SLO is veel materiaal te vinden. Ik vond het een informatieve bijeenkomst.

Rekenjongens

Als laatste wil ik noemen de bijeenkomst van de rekenjongens van IPABO, Fokke Munk en Leo Prinsen. Geweldig zoals zij allerlei dingen uit het dagelijks leven inzetten om aan te rekenen. Wat dacht u van het volgende probleem: hebben de haren van een afwasborstel een grotere dichtheid (aantal haren per cm^2) dan de haren op je hoofd? U zult begrijpen dat de oplossingen van de verschillende groepen heel erg uit elkaar lagen. Misschien iets om in je les te doen. Er zijn al vmbo-scholen in het land die dit soort vragen/problemen in hun lessen verwerkt hebben. Er werden nog meer problemen aangesneden maar het voert nu te ver om dat allemaal te beschrijven.

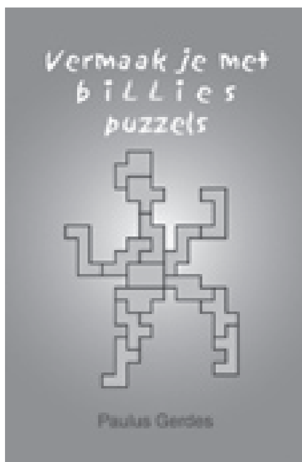




Kom in ieder geval volgend jaar in januari naar de 9e Wiskundeconferentie voor docenten wiskunde in het vmbo en de onderbouw havo/vwo!

Over de auteur
Gert de Kleuver is afdelingsleider aan het Ichthus College in Veenendaal.
E-mailadres: *g.de.kleuver@gmail.com*

Verschenen / Billies Puzzels



Uitgever: Lulu (2010)
ISBN: 978-0-557-26200-7
Online verkrijgbaar: http://stores.lulu.com/pgerdes
Prijs variërend (zie hieronder)

Er zijn Nederlandstalige uitgaven verschenen van drie nieuwe (wiskundige) puzzelboeken van de hand van Paulus Gerdes. Een puzzel bestaat uit veertien puzzelstukken, genaamd biLLies. Iedere biLLie bestaat uit twee eLLen. Paul Gerdes schrijft daarover: 'Eén L staat voor mijn oudste dochter Lesira, de andere voor mijn jongste dochter Likilisa. Het was voor hen dat ik de puzzels in eerste instantie bedacht.'
De puzzels in de puzzelboeken zijn toegankelijk voor tieners en volwassenen van tien tot honderd jaar. Ze kunnen individueel opgelost worden of in 'clubs', zowel in de vrije tijd als op school. Om elk van de puzzels op te lossen heb je sommige of alle veertien 'biLLies', de stukken van het spel, nodig. In ieder hoofdstuk worden activiteiten en puzzels gepresenteerd, gevold door één of meer rondes van vragen, antwoorden en oplossingen. De uitdaging van sommige puzzels bestaat uit het maken van bepaalde symmetrische patronen.

De drie puzzelboeken zijn:
- *Vermaak je met biLLies puzzels* (252 blz.; print: €14,66; download: €5,84)
- *Puzzelplezier met biLLies* (76 blz.; print: €8,75; download: €4,38)
- *Meer puzzelplezier met biLLies* (76 blz.; print: €8,75; download: €4,38)

Ludolph van Ceulen in de klas

[Marjanne de Nijs, Margot Rijnierse]

Kriebels

We staan al jaren als eerstegraads docent wiskunde met veel plezier voor de klas. Toch ging het een jaar of drie geleden kriebelen. We wilden meer verdieping, maar niet in de vorm van een korte nascholingscursus of professionaliseringsmodule. Na wat omzwervingen kwamen we terecht bij de Universiteit Utrecht. Daar zijn we toegelaten tot de *Masteropleiding Science Teacher Education*. Het eerste jaar volgden we vier vakken op masterniveau via de zogenaamde MasterMath-constructie [1].
De gevolgde colleges waren *Elliptic Curves* van Jaap Top, *Geschiedenis van de Wiskunde* van Steven Wepster, *Stochastiek* van Ronald Meester en *Geometry* gegeven door Aad Goddijn. Het was bijzonder inspirerend om deze lessen te volgen. Na het goed afronden van deze vakken zijn we gestart met ons onderzoek. Dit moest bestaan uit een didactische en wiskundige component.
In eerste instantie kozen we het verkeerde onderwerp. Blijkbaar gebeurt dit vaker, maar voor ons was het even slikken. Differentiaalvergelijkingen in het hbo zijn prachtig, maar wij sleurden ons met veel moeite aan de studie om onverrichter zake na twee maanden tot de conclusie te komen dat dit het niet zou worden. We wilden graag studeren en daar veel tijd en moeite in stoppen, maar het moest ons echt aanspreken en motiveren.
In die stemming gingen we langs bij onze begeleider, Steven Wepster. Hij wist wel een alternatief: Ludolph van Ceulen [2]. Iedereen die in de buurt van Steven kwam, werd met het Van Ceulen-virus besmet en wij vormden daarop geen uitzondering.
De opdracht die hij mee gaf, was bijzonder uitdagend: ‘Schrijf, op basis van het werk van Ludolph van Ceulen, lesmateriaal voor het havo/vwo van klas 1 tot en met klas 6. Zo kunnen vanaf 2010, het *Ludolph van Ceulen Jaar*, leerlingen van alle klassen iets van deze rekenmeester leren.’
Afgelopen februari was het zover: we (MdN en MR) presenteerden ons materiaal tijdens een workshop op de Nationale Wiskunde Dagen. Hierbij een overzicht.

Muntenspel (MdN/MR)
klas 1 havo/vwo

Vanaf onze eerste brainstorm over geschikt lesmateriaal hadden we al een spel in onze gedachten. We wilden een creatieve werkvorm waardoor de onderbouwklassen in 2010 kennis konden maken met Ludolph van Ceulen. Het is altijd gevaarlijk om eerst de vorm te kiezen en dan pas na te denken over de inhoud. Daarom heeft het lang geduurd voordat we werkelijk met dit idee aan de slag gingen.
In de herfst lazen we de tekst van Ludolph over het rekenen met munten. In zijn tijd waren er verschillende muntsoorten in omloop en voor veel mensen was het lastig om daarmee te rekenen.
In de *Aritmetische en Geometrische Fondamenten* [3] vonden we een omrekentabel voor Ponden, Schellingen, Groten en Mijten. Deze tabel werd de basis voor het *Ludolph van Ceulen Muntenspel*.
Het spel bestaat uit een spelbord en muntkaarten (***zie figuur 1***). Leerlingen krijgen een blad met de tabel van Ludolph en de spelregels. Met pionnen en het gooien van een dobbelsteen bewegen ze zich over het spelbord. Daar komen leerlingen allerlei opdrachten tegen waarbij ze muntkaarten verzamelen of kwijtraken. De bedoeling is dat ze met behulp van de muntkaarten en de omrekentabel *precies* 1 pond bij elkaar sparen. Dit kan bijvoorbeeld met de volgende kaarten: $\frac{1}{4}$ pond, $\frac{5}{12}$ pond, 8 groten en 6 schellingen.
Met het gespaarde pond kunnen ze een kaartje kopen voor de *Trekschuit*, een speelvlak op het spelbord. De schipper vaart ze naar Leiden, de laatste woonplaats van Ludolph. De eerste speler die daar is, mag zich winnaar noemen van het *Ludolph van Ceulen Muntenspel*. Spelenderwijs zijn leerlingen bezig met het rekenen met breuken. Het spel is snel uit te leggen en daardoor kunnen leerlingen vrijwel direct starten. Het is geschikt voor een lesuur vlak voor de vakantie of tussen twee hoofdstukken in. Ook is het een leuke opstartles voor het oefenen van breuken.

Goochelen met oppervlaktes (MR)
2-havo/vwo

Mijn oog viel op een propositie in de *Fondamenten* die ik erg grappig vond.
Van een willekeurige vierhoek maakt Van Ceulen een driehoek met een even grote oppervlakte, met een principe dat voor de leerlingen goed te begrijpen is (***zie figuur 2***). De oorspronkelijke figuur $ABCD$ verandert hij in ABE. $ABCD$ en ABE hebben een even grote oppervlakte. Hoe gaat dit in zijn werk? Trek de lijn BD en trek vervolgens vanuit C een lijn evenwijdig aan BD tot die lijn het verlengde van AD snijdt. Omdat BD en CE evenwijdig lopen, hebben driehoeken met als basis BD en het derde hoekpunt op CE, dezelfde basis en dezelfde hoogte en dus dezelfde oppervlakte.
Van Ceulen goochelt op verschillende manieren met oppervlaktes van driehoeken, rechthoeken en overige veelhoeken. Als pronkstuk geeft hij een figuur van een 11-hoek die hij verandert in een even grote driehoek.
Omdat ik zelf gegrepen was door de transformaties, besloot ik hier voor de leerlingen van de tweede klas lesmateriaal over te maken. Zo ontstond een serie opdrachten voor 2-havo/vwo, voor twee of drie lessen. Aan de orde komen naast de transformaties ook eenvoudig redeneren en bewijzen. Voor de leerlingen is dit moeilijk, maar het is een mooi moment om er al iets van te laten zien.

In de gang kwam een aantal jongens me achterna om hun oplossingen te laten controleren. Wat een voldoening als je van een 7-hoek een even grote 3-hoek weet te maken. Maar wel even zweten!



Meester Ludolphs wortelrekenen (MdN)

3-vwo en 4-vwo wiskunde B

Dit jaar startte ik op een nieuwe school en kreeg onder andere een klas 2-vwo toegewezen. Het eerste dat op het menu stond waren wortels. Je maakt jezelf niet direct geliefd door als nieuwe docent met een dergelijk lastig onderwerp te starten. Ik realiseerde me weer wat voor impact deze wiskunde heeft op leerlingen. Tijd om eens te kijken wat Van Ceulen zegt over dit onderwerp. Gelukkig liet hij me niet in de steek.

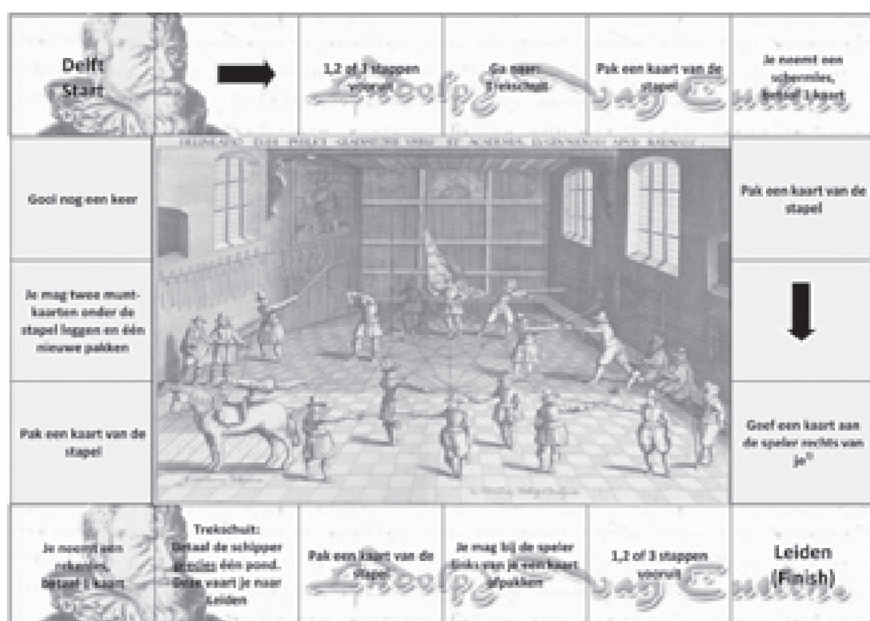
Vanwege 'gebrek aan rekenmachines' in die tijd laat hij in zijn *Fondamenten* de lezer allereerst zien hoe je van elk getal handmatige wortel kan berekenen. Een mooi algoritme dat ook interessant kan zijn om met leerlingen in de klas uit te voeren, echter, voor het materiaal dat ik op het oog had, minder geschikt. Ik wilde leerlingen praktisch aan de slag laten gaan met wortelrekenen op vwo-niveau.

Bijzonder van het materiaal van Ludolph is dat gelijksoortige en niet-gelijksoortige wortels mooie namen hebben (***zie figuur 3***). Gelijksoortige wortels noemt hij *communicanten*, een term die mijn leerlingen bijzonder interessant vinden. Een combinatie van twee niet-gelijksoortige wortels noemt hij een *binomisch* of *residuus* getal, respectievelijk de som of het verschil. Doordat leerlingen zich bewust worden van deze indeling krijgen ze een beter begrip van de mogelijkheden en onmogelijkheden bij het rekenen met wortels.

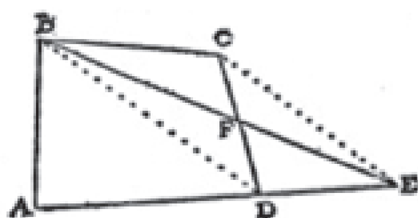
In het lesmateriaal staan de originele vraagstukken van Ludolph. Hij geeft de opgave en meteen ook het antwoord. Door bij elke opgave de wortels te herleiden en duidelijk de tussenstappen op te schrijven moet een leerling aantonen dat het antwoord van Ludolph correct is. Een fout in hun tussenstappen kunnen ze hierdoor direct herstellen. Uiteraard twijfelen leerlingen wel eens aan het antwoord van Ludolph. Het helpt om ze dan te herinneren aan het feit dat deze rekenmeester zonder enig rekentuig 35 correcte decimalen van pi kon berekenen. Overtuigd kijken ze dan toch kritisch naar hun eigen uitwerking.

Het materiaal is bedoeld voor het ophalen van de wortelvaardigheden uit klas 2. Dit kan voor 3-vwo leerlingen maar ook voor leerlingen in 4-vwo met wiskunde B. Er is op twee niveaus mee te werken. Ter uitdaging zijn er 'extra-vraagstukken' die een groter beroep doen op algebraïsche vaardigheden.

De relatie met de tweede klas is goed gekomen. Nu nog even afwachten of we dat ook kunnen zeggen van hun wortelvaardigheden.



figuur 1



figuur 2

Divideert $\left\{ \begin{matrix} \sqrt{832} \\ \sqrt{796} \\ \sqrt{27} \\ \sqrt{1\text{[illegible]}} \\ \sqrt{\text{[illegible]}} \end{matrix} \right\}$ door $\left\{ \begin{matrix} \sqrt{32} \\ \sqrt{24} \\ \sqrt{2\text{[illegible]}} \\ \sqrt{1\text{[illegible]}} \\ \sqrt{\text{[illegible]}} \end{matrix} \right\}$ Comt $\left\{ \begin{matrix} \sqrt{26} \\ \sqrt{33\text{[illegible]}} \\ \sqrt{10\text{[illegible]}} \\ \sqrt{1\text{[illegible]}} \\ \sqrt{\text{[illegible]}} \end{matrix} \right.$

figuur 3



figuur 4

Bewijzen onder leiding van Van Ceulen (MR)

4-vwo

In de tijd dat ik de *Fondamenten* las, moest ik tijdelijk lesgeven in een bijgebouw. Het gebouw was gebruikt door een andere school en zou na ons verblijf tegen de vlakte gaan. De muren waren zachtgeel met overal witte plekken van dichtgesmeerde gaten. Van de onderdirecteur mocht ik het aankleden zoals ik wilde en ik besloot een aantal meetkundige proposities van Van Ceulen op de muur te zetten (***zie figuur 4*** op pag. 245). Tijdens de eerste lessen in het nieuwe gebouw wilde elke klas weten wat die muurschilderingen betekenden. Zo kwam ik op het idee om opdrachten te maken, waarmee de leerlingen zelf de betekenis van deze proposities kunnen vinden.

Het materiaal dat ik gemaakt heb, is bedoeld om leerlingen kennis te laten maken met redeneren en bewijzen. Op opdrachtbladen staan de stappen die gezet moeten worden om de proposities op de muur te bewijzen. De leerlingen worden uitgedaagd om de stappen met elkaar te verbinden en zo het bewijs af te maken. Ze lopen met de opdrachtbladen van muurtekening naar muurtekening om de bewijzen te doorgronden.

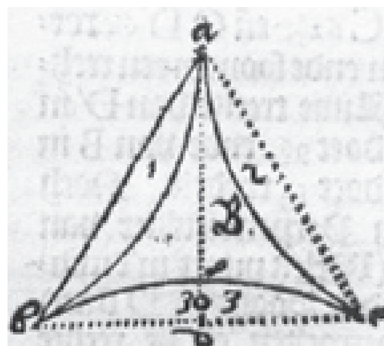
Ik weet uiteraard niet of u in de gelegenheid bent de figuren van Van Ceulen op de muur te schilderen. Mocht 'de baas' dit niet goed vinden, dan staan in het materiaal uiteraard de figuren, zodat u die in de klas kan ophangen of op tafels neer kan leggen. Het vergt wat organisatie, maar het is heel leuk om te zien hoe leerlingen elkaar uitleg geven bij die prachtige proposities.

Landmeten onder leiding van Van Ceulen (MR)

4-havo, wiskunde B

Vanden Circkel[4] is vooral bekend om de zoektocht van Van Ceulen naar de decimalen van het getal pi. Na de hoofdstukken over de cirkel staan een aantal hoofdstukken over landmeten (***zie figuur 5***). De landmeetproblemen waren leuk om te doorgronden, omdat bij veel opgaven de vergrotingsfactor een rol speelt. In lesboeken zijn sommen met de vergrotingsfactor vaak gekunsteld en hier speelde de vergrotingsfactor de hoofdrol in de oplossing.

Het doel van de opgaven van Van Ceulen was onder andere om te leren werken met goniometrische tabellen, die net even anders opgesteld zijn dan wij nu gewend zijn. In mijn onschuld probeerde ik de leerlingen ook deze tabellen te laten doorgronden. Hoewel de leerlingen aandoenlijk hun best deden om met deze 'Van Ceulen-getallen' te leren werken, zag ik dat ik mijn doel voorbij schoot. Bedankt H4B! Ik wilde *SosCasToa* herhalen omdat dat in de methode niet gebeurt, maar ik wilde de leerlingen niet in de war brengen. De 'Van Ceulen-getallen' heb ik geschrapt. Uit de landmeetproblemen heb ik acht verrassende, voor leerlingen geschikte opgaven gekozen. Deze opdrachten kunt u meegeven als po aan groepjes van twee of drie leerlingen. De leerlingen moeten uitzoeken hoe Van Ceulen de oplossing vond en hoe wij dat tegenwoordig zouden doen. Het is voor havo-B leerlingen een goede oefening in de vergrotingsfactor, *SosCasToa* en de stelling van Pythagoras. Ze moeten het hoofd koel houden in berekeningen met een behoorlijk aantal stappen, maar er staan genoeg aanwijzingen bij om ze vooruit te helpen!



figuur 5 Hierin is ABC de figuur die door drie naar binnen gebogen cirkelbogen begrensd wordt. Elke boog is ¼ van een cirkel. De driehoek die ABC omsluit is een gelijkzijdige driehoek met zijden van 360 roeden. Gevraagd: Hoe groot is de oppervlakte van de figuur ABC binnen de cirkelbogen? Van Ceulen rekent met driehoekszijden van 1 roede, zodat het rekenwerk eenvoudig blijft. Vervolgens zet hij de vergrotingsfactor in om het gevraagde antwoord te vinden.

Van Interest met Van Ceulen (MR)

5/6 vwo, wiskunde A

En toen kwam *Van Interest*, ook een hoofdstuk uit *Vanden Circkel* (***zie figuur 6***). Dat moest iets kunnen opleveren voor wiskunde A. Ik begon met gevoelens van twijfel. Rente, wat was daar nou leuk aan? Toch zat ook in dit materiaal een grote verrassing. In het voorwoord van *Van Interest* geeft Van Ceulen aan dat hij de mensheid wil waarschuwen voor woekeraars en listige koopmannen. In veel opgaven laat hij handig rekenwerk zien, waardoor de opgaven ineens interessant worden om te bestuderen.

In de tijd van Van Ceulen werd nog veel gerekend met enkelvoudige rente. Op speelse wijze laat Van Ceulen A met B discussiëren en soms komt C (Van Ceulen?) met wijze raad. Wat te denken van A die 100 gulden leent van B tegen 10%, enkelvoudige rente. Na een jaar komt A terug bij B met de vraag of hij het geld nog drie jaar langer mag houden. B gaat hiermee akkoord. Drie jaar later ontstaat onenigheid over het terug te betalen bedrag. B gaat uit van 110 gulden (het bedrag dat hij na de oorspronkelijke afspraak teruggekregen zou hebben) plus drie jaar rente en wil 143 gulden zien. A gaat uit van de 100 gulden die hij 4 jaar geleend heeft plus vier jaar rente en komt met 140 gulden. B redeneert dan: 'Jij zegt dat die 110 gulden van 3 jaar geleden 4 jaar geleden 100 gulden waard waren. Dan kan ik ook zeggen dat die 110 gulden 12 jaar daarvoor 50 gulden waard waren en dat je dus nu maar 50 + 12 × 5 + 3 × 5 = 125 gulden hoeft terug te betalen, '*…welcke rekeninghe my niet (noch niemant) behagen soude*.'

In het lesmateriaal over *Van Interest* staan de voorbeelden van de woekeraar en de listige koopman centraal, evenals de discussies tussen A en B over de te betalen rente.

Koordenvierhoek (MdN)

5/6 vwo, wiskunde B

Zodra ik me enigszins verdiept had in Ludolph van Ceulen, startte ik met het bestuderen van het 5e hoofdstuk uit de *Fondamenten*. Dit begint met een populair vraagstuk uit die tijd, de constructie van een koordenvierhoek op basis van vier gegeven lijnstukken (***zie figuur 7***). Van Ceulen gaat vervolgens op verschillende manieren deze gevraagde koordenvierhoek construeren. Voor mij betekende dit een interessante speurtocht naar zijn methoden en bijbehorende bewijzen.

In de 16e eeuw was er veel aandacht voor de klassieke Griekse meetkunde. De *Elementen van Euclides* waren deels in het Duits vertaald en dus toegankelijk voor Van Ceulen, die geen Grieks of Latijn beheerste. Daarnaast was in de middeleeuwen veel kennis ontstaan over het oplossen van praktische problemen met behulp van algebra. Vooral Islamitische wiskundigen hadden daar veel in betekend en ook hun teksten werden vanaf de 16e eeuw gepubliceerd. Ludolph als wiskundige

en ‘rekenmeester’ was een groot voorstander van het combineren van deze twee werelden: algebra als krachtig hulpmiddel om meetkundige problemen op te lossen. Om een algebraïsch verkregen oplossing terug te kunnen koppelen aan de meetkunde moest hij op basis van een getal de lengte van een lijnstuk construeren. De spelregels hiervoor waren nog niet bedacht dus dat deed Ludolph deels zelf.

Leerlingen maken in dit materiaal eerst kennis met deze technieken van Ludolph: het koppelen van een getal aan een lijnstuk, het werken met een willekeurige eenheidsmaat en het zoeken van een onbekende eenheidsmaat bij een gegeven lijnstuk. Ook zien ze hoe Ludolph rekenkundige bewerkingen uitvoert met lijnstukken.
In het tweede hoofdstuk neem ik leerlingen mee op speurtocht naar de methoden van Ludolph om de koordenvierhoek te construeren op basis van vier gegeven zijden. Allereerst geeft hij een rekenkundige oplossing, via een algoritme voor het berekenen van de diagonaal van de koordenvierhoek. Wat hier achter zit, is dan nog onduidelijk, maar met de eerder geleerde technieken kunnen ze dan wel de koordenvierhoek construeren.
Daarna laat Van Ceulen een oplossing zien op basis van de klassieke Griekse meetkunde. Leerlingen ontdekken vervolgens dat de stelling van Ptolemaeus de brug is tussen de rekenkundige oplossing en de meetkundige constructie. Ze gebruiken hiervoor algebraïsche vaardigheden en ook de basiskennis van bewijzen en redeneren. Alle constructies worden uitgevoerd met behulp van passer en lat (liniaal zonder eenheidsaanduiding).
Ter afsluiting bevat het materiaal twee eindopdrachten met de originele tekst van Ludolph. Bij de eerste eindopdracht gaan leerlingen in de voetsporen van de rekenmeester zelf aan de slag met het exact berekenen van een aantal lijnstukken in de eerder geconstrueerde koordenvierhoek. De antwoorden staan al in de tekst en de leerling zal met een goede meetkundige onderbouwing en alle rekenkundige tussenstappen moeten laten zien of ze correct zijn. De tweede eindopdracht geeft een andere constructie van een koordenvierhoek met vier gegeven zijden. Door stap-voor-stap de tekst te doorlopen kan de leerling deze vierhoek zelf met passer en lat construeren.

Het materiaal over de koordenvierhoek ligt bij de Zebra-redactie. Al het andere lesmateriaal inclusief docentenhandleiding is geplaatst op de website « www.ludolphvanceulen.nl ». We zouden graag zien dat u het gebruikt in de les. Mochten er vragen of opmerkingen zijn, laat het ons dan vooral weten.

De afgelopen jaren overziend…

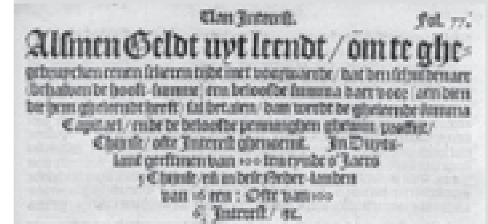
We vonden het bijzonder om aan de Universiteit Utrecht te studeren. Onze collegedag was het uitje van de week, hoe zwaar het soms ook was om werk en studie te combineren. We zullen het missen. Niet meer midden in de nacht uit bed springen omdat je een oplossing gevonden denkt te hebben. Niet meer in de tram met Van Ceulen op schoot.
We hebben meer geleerd dan verwacht. Het volgen van de vakken heeft onze eigen lessen verrijkt, zowel inhoudelijk als didactisch. Het acteren op wetenschappelijk niveau viel niet altijd mee: waarom toch altijd die bronvermeldingen als je gewoon lekker bezig bent. Maar het is onomkeerbaar, we stellen meer vragen en kijken kritischer naar de antwoorden. De contacten die we hebben opgedaan tijdens ons onderzoek zijn zeer waardevol. Van je zolderkamertje afkomen en aan een ander uitleggen wat je nu precies doet, levert meer inzichten dan gedacht. We waren blij met alle tips en steun.
En nu… Onze leerlingen kunnen weer de volle aandacht krijgen, dus jongens en meiden zet je schrap! Onze familie en vrienden mogen rekenen op een hernieuwde kennismaking.

Dank

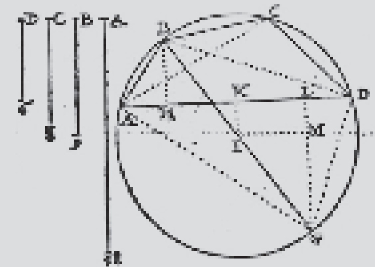
Tot slot willen we Joke Daemen bedanken die het met ons wel wilde proberen en Steven Wepster die ons begeleidde, motiveerde, verbeterde, op het spoor zette, uitdaagde, nogmaals verbeterde en waardeerde om ons werk.

Noten

[1] Zie: *www.mastermath.nl*
[2] Zie voor meer informatie: *www.ludolphvanceulen.nl*
[3] L. van Ceulen (1615): *De Arithmetische en Geometrische Fondamenten.* Leiden: Joost van Colster en Jacob Marcus.
[4] L. van Ceulen (1596): *Vanden Circkel.* Delft: Jan Andriesz.


Van Interest. Fol. 77.
Alsmen Geldt uyt leendt / om te ghe-

figuur 6



figuur 7

Over de auteurs
Marjanne de Nijs is wiskundedocent op het Cosmicus College in Rotterdam en redactielid van *Euclides*.
E-mailadres: *nijs0471@planet.nl*
Margot Rijnierse is wiskundedocent op De Populier in Den Haag.
E-mailadres: *mm.rijnierse@freeler.nl*

Moet dat zo? Kan het niet anders?

DEEL 2

[Sieb Kemme]

Pieter vd W, 5-havo B, heeft het hele jaar geen klap uitgevoerd. Met een laatste restje inspanning en dankzij de laatste groepsopdracht, weet hij zijn schoolonderzoek met een gemiddelde 6 af te sluiten. Maar op het centraal schriftelijk gaat hij voor de bijl. Met een score van 34 punten van de 87 zou hij op een 3,5 uitkomen, ware het niet dat een N-term van 2 hem op een 5,5 weet te tillen. In combinatie met de 6 voor het schoolonderzoek gaat hij zelfs nog met een voldoende voor wiskunde de deur uit. Als docent zou ik daar grote moeite mee hebben. Gelukkig vond de vaksectie wiskunde van de CEVO samen met de toetsdeskundigen van het Cito dat ook. Ze stuurden een brief naar het dagelijks bestuur van de CEVO met de vraag of het ministerie zich wil buigen 'over het effect dat een zwaar havo B-programma zal hebben op het aantal leerlingen dat voor dit programma kiest.'

Hoe heeft dit zo ver kunnen komen? Onder druk van de schoolleiders wordt de omvang van alle vakken op één hoop gegooid met gevolg dat het aantal slu voor wiskunde B sterk wordt ingekrompen. Onder protest wordt een nieuw examenprogramma opgesteld dat aan minimale eisen voor succesvolle doorstroming naar hbo zou moeten voldoen. Op het laatste ogenblik wordt daar nog een lijst met algebraïsche vaardigheden aan toegevoegd gecombineerd met een geringe uitbreiding van het aantal slu. Ondanks deze uitbreiding van slu geeft een e-mail-enquête onder docenten aan dat het met aantal contacturen voor havo B treurig is gesteld. Ook in dit opzicht lijken schooldirecties de kaasschaaf te hanteren: alle vakken even groot, dus allemaal evenveel of weinig contacturen.
Het niveau en de inhoud van het examen 2009 werd door docenten als redelijk ervaren, passend bij de eisen van het examen. Een N-term van 2, nodig om het gemiddelde percentages onvoldoendes op 38 te brengen, geeft aan dat het wiskundedocenten niet is gelukt om binnen de beschikbare uren de leerlingen voldoende voor te bereiden op het havo B-examen.

Er zijn drie mogelijkheden:
- het ministerie past tussentijds de exameneisen aan door onderwerpen in een ijskast te zetten;
- het ministerie verhoogt het aantal beschikbare slu voor wiskunde B;
- het ministerie doet niks.

De eerste mogelijkheid heeft een zekere traditie, maar betekent dat we weer terug zijn bij af. Het streven was juist om een stevig B-programma neer te zetten met betere kansen op een succesvolle doorstroming.
De tweede mogelijkheid zou betekenen dat havo wiskunde B uit de pas gaat lopen in aantallen lesuren bij de andere vakken en daar zullen de zo machtige schooldirecties niet blij mee zijn.
De derde mogelijkheid is de gemakkelijkste en dus de meest waarschijnlijke. Het gevolg is dat docenten er impliciet vanuit zullen gaan dat de examens gemakkelijker zullen worden, zodat we ook op dit punt weer terug zullen zijn bij af.

Als ik minister of staatssecretaris van OCW was dan wist ik het wel: ik zou per direct het hele verschijnsel N-term afschaffen. Elke N-term, hoe klein ook gekozen, leidt op de lange termijn onvermijdelijk tot devaluatie van het niveau van de exameneisen. Het is een kwestie van psychologie. Voordat je als leerling aan het examen begint, weet je dat de scores van een moeilijk examen worden bijgesteld. Dus als alle leerlingen voor een zesje gaan, zal het grote percentage onvoldoendes er voor zorgen dat de 6 een 7 wordt. En de examenmakers zullen er op hun beurt naar streven een examen samen te stellen dat een lage N-term nodig heeft. Het systeem van de N-term zal statistisch allemaal wel doordacht zijn, maar komt in wezen neer op de beroemde wet van Posthumus: 30% van de leerlingen haalt een onvoldoende, ongeacht het niveau van de toets. Op lokaal niveau, binnen één klas, is dit nog zo erg niet, want het houdt de moed erin en je hebt als docent nog mogelijkheden om tussentijds bij te sturen. Maar op nationaal niveau leidt het onvermijdelijk tot devaluatie van het eindniveau.
Misschien zou een eenmalig rampzalig eindexamenresultaat zonder N-term de directies de ogen openen dat ze het onmogelijke van hun wiskundedocenten vragen en dat ze wat aan de wiskunde-uren zullen moeten doen willen ze hun slagingspercentages op peil houden.

Over de auteur
Sieb Kemme studeerde wiskunde, gaf les aan leerlingen en studenten en houdt zich bezig met de ontwikkeling van lesmateriaal voor het wiskundeonderwijs. Van 2007 tot 2009 was hij als projectleider van cTWO ook betrokken bij beleidsmatige ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs.
E-mailadres: *skemme@educadbv.nl*

Vanuit de oude doos

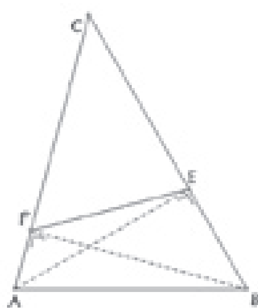
[Ton Lecluse]

Ton Lecluse is docent wiskunde en heeft een doos met oude schoolboeken uit de vorige eeuw, waar hij graag in neust. Hij vindt vaak mooie opgaven (zonder uitwerking gelukkig) die hem uitdagen een oplossing te zoeken die past in het huidige curriculum. In de rubriek 'Vanuit de oude doos' wordt in elke aflevering een juweeltje behandeld. U kunt er uw lessen mee verrijken!

Driehoek in tweeën

Naar aanleiding van een toelatingsexamen wiskunde tot de universiteiten in 1925; de eigenlijke opgave, letterlijk:
Van Δ*ABC* is gegeven de basis *AB* en de hoogte *CD*. Construeer deze driehoek als de lijn, die de voetpunten der beide andere hoogtelijnen verbindt de driehoek verdeelt in twee delen van gelijk oppervlak.

U wordt eerst uitgedaagd een werktekening te maken die dient als beschrijving van de situatie (echt construeren kan pas nadat de opgave is opgelost!) en om de werkwijze te beschrijven.
Dan pas onder de streep spieken! Wellicht helpt het dit model te exploreren met een dynamisch computerprogramma.

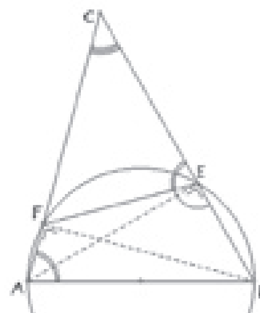


figuur 1a

In figuur 1a zijn in driehoek *ABC* de hoogtelijnen *AE* en *BF* getekend, en is het lijnstuk *EF* getrokken. De hoogtelijn *CD* is (voorlopig) weggelaten.
Hoe nu verder? Niet verder lezen, eerst zelf proberen.

Een bekend feit is dat de driehoeken *ABC* en *EFC* gelijkvormig zijn.
Kunt u zeggen waarom? Niet verder lezen, even zelf proberen.

Omdat $\angle AEB = \angle AFB = 90°$ is, liggen *E* en *F* op de cirkel waarvan *AB* middellijn is (*Thales-cirkel*); ***zie figuur 1b***.

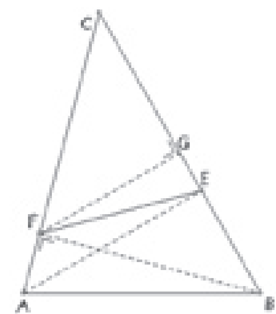


figuur 1b

Dus is vierhoek *ABEF* een koordenvierhoek, en is $\angle BEF = 180° - \angle BAF$.
Ook is $\angle CEF = 180° - \angle BEF$; deze vormen immers samen een gestrekte hoek.
Dus geldt: $\angle CEF = \angle BAF = \angle A$.
Omdat de driehoeken *ABC* en *EFC* ook hoek *C* gemeen hebben, zijn deze driehoeken gelijkvormig (*hh*).
Bovendien is gegeven dat de oppervlakte van driehoek *EFC* de helft is van de oppervlakte van driehoek *ABC*. Hoe verhouden de overeenkomstige zijden van deze twee driehoeken zich?
Niet verder lezen, eerst zelf formuleren.

In de onderbouw leren onze leerlingen dat bij een lineaire vergroting met factor k de oppervlaktevergroting k^2 is.
Uit de gegevens volgt: $k^2 = 2$, dus $k = \sqrt{2}$.
$\sqrt{2}$ is dus de verhouding tussen de overeenkomstige zijden van de driehoeken *ABC* en *EFC*, maar ook tussen overeenkomstige hoogtelijnen!

In driehoek *ABC* is, onder andere, hoogtelijn *BF* getekend. Trek de overeenkomstige hoogtelijn in driehoek *EFC* en onderzoek bijzonderheden in de aldus ontstane figuur.
Lukt dit? Niet verder lezen, eerst zelf proberen.



figuur 2

In driehoek *ABC* hoort bij de basis *AC* de hoogtelijn *BF*. Analoog geldt in driehoek *EFC* dat bij de basis *CE* de hoogtelijn *FG* hoort.
Er geldt dus: $BF = \sqrt{2} \cdot FG$.
Welke fraaie conclusie kan hieruit getrokken worden? Niet verder lezen, eerst zelf proberen.

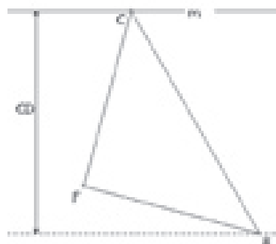
Driehoek *BFG* is rechthoekig in *G*, en de zijden *FG* en *BF* verhouden zich als $x : x\sqrt{2}$.
Dan is, volgens de stelling van Pythagoras, de derde zijde *BG* ook gelijk aan x.
Dus is driehoek *BFG* een (45-45-90)-driehoek, een half vierkant. Het is eenvoudig in te zien dat ook driehoek *BFC* (waarin $\angle F = 90°$) een half vierkant is.

Even resumeren. We concentreren ons hierbij op punt *F*. Dit punt *F* ligt op de cirkel waarvan *AB* middellijn is. Bovendien is driehoek *BFC* een half vierkant. De ligging van punt *C* is vooralsnog onduidelijk, maar de afstand *CD* van *C* tot *AB* is gegeven.
Is het nu duidelijk(er) hoe de driehoek *ABC* te construeren is? Niet verder lezen, eerst zelf proberen.

Het gegeven dat *C* op gegeven afstand *CD* van *AB* ligt kun je als volgt vertalen:

- Trek een lijn m boven AB en evenwijdig met AB op de gegeven afstand CD. Dan ligt punt C ergens op deze lijn.

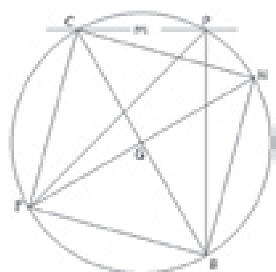
Wat is dan de meetkundige plaats van de punten F waarbij driehoek BFC een half vierkant is, als C de lijn m doorloopt (en $\angle F = 90°$)?
Wellicht helpt ***figuur 3***, waarin irrelevante punten en lijnstukken zijn weggelaten.



figuur 3

Dit model kan eenvoudig worden geconstrueerd met een dynamisch computerprogramma. Kies een punt B, een lijn m en een *sleeppunt* C op m. Construeer het vierkant waarvan BC diagonaal is. Daarvan is F een van de hoekpunten. Zet het *spoor* van punt F aan en sleep C.
Formuleer het vermoeden over de meetkundige plaats van F, en probeer dit vermoeden te bewijzen.
Niet verder lezen, eerst zelf proberen.

Het helpt het volledige vierkant $BFCH$ te tekenen met zijn omgeschreven cirkel, die de lijn m in C en P snijdt; ***zie figuur 4***.



figuur 4

Omdat $\angle BCF = 45°$ (*half vierkant*) en $\angle BCF = \angle BPF$ (*beide op boog BF*), en $\angle BPC = 90°$ (*Thales-cirkel*) waardoor punt P vast ligt op m, ligt F dus op de deellijn van hoek BPC.
Hiermee is de meetkundige plaats van alle punten F (waarvoor $BFCH$ een vierkant is met C op m) bekend.

Dan kan nu het oorspronkelijke probleem worden opgelost, vanuit de volgende, opnieuw geformuleerde probleemstelling (***zie figuur 5***):

- Gegeven lijnstuk AB en een lijn m, die evenwijdig is met AB.

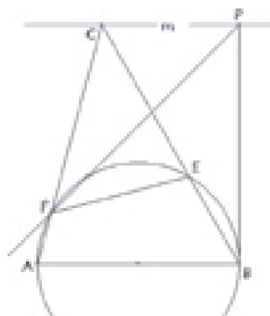
Construeer een punt C op m zó dat de lijn door de voetpunten E en F van de hoogtelijnen AE en BF in driehoek ABC deze driehoek in twee stukken verdeelt met gelijke oppervlakte.



figuur 5

Voer nu deze constructie uit. Niet spieken onder de streep!

Het punt F ligt op twee meetkundige plaatsen: op de cirkel waarvan AB middellijn is, en op de deellijn van hoek BPC (waarbij P de projectie is van B op m); ***zie figuur 6***.



figuur 6

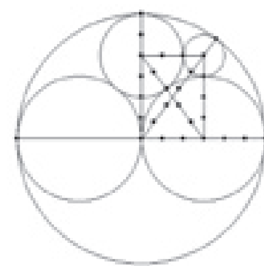
Nadat P en F zijn geconstrueerd, snijdt AF de lijn m in punt C, waarna CB en FE getekend kunnen worden.
Aangezien er in deze figuur twee snijpunten zijn van de deellijn van hoek BPC met de cirkel, zijn er twee oplossingen voor F (en C). De tweede mogelijkheid voor F geeft de oplossing die ontstaat door de figuur te spiegelen in de middelloodlijn van AB.

Tot slot

Wanneer de afstand CD van C tot AB te groot wordt (ten opzichte van AB), zal de deellijn van hoek BPC de cirkel niet meer snijden. Er is dan geen oplossing!
Wellicht wilt nu nog even uitzoeken hoe de lengtes van AB en CD zich verhouden in het (uiterste) geval dat PF de cirkel raakt.

Twee reacties op eerdere problemen

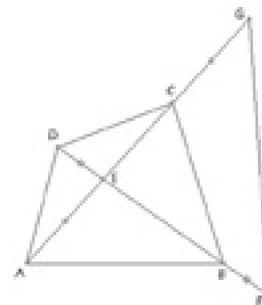
1. De cirkelpuzzel in *Euclides* 85-3
In het decembernummer stond een cirkelpuzzel, waarin gevraagd werd de straal van de kleinste getekende cirkel uit te drukken in de straal van de grootste cirkel.



figuur 7

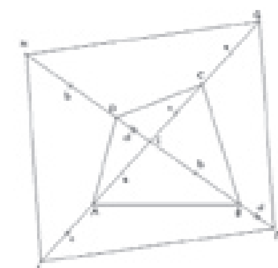
Agnes Verweij (TU Delft) stuurde me de ***in figuur 7*** staande tekening. Zij gaf de volgende toelichting: Als je de straal R van de grootste cirkel op een paar plaatsen in 6 gelijke delen verdeelt en een paar 3-4-5-driehoeken erbij tekent, is direct – zonder rekenwerk – duidelijk wat de middelpunten en de stralen zijn van de rakende cirkels die er in 'passen'.

2. Over gelijke oppervlaktes in *Euclides* 85-4
In het februarinummer werd aangetoond dat vierhoek $ABCD$ en driehoek EFG gelijke oppervlaktes hebben; ***zie figuur 8***.



figuur 8

Ton Hengeveld (Murmelliusgymnasium, Alkmaar) stuurde me de volgende oplossing.
Breid de constructie uit naar de hoekpunten D en A van de vierhoek; ***zie figuur 9***.



figuur 9

Er ontstaat dan een parallellogram $FGHJ$ waarin geldt:

$$opp(\Delta EFG) = opp(\Delta EGH) = opp(\Delta EHJ) = opp(\Delta EJF)$$

Verder geldt (zie de aan het eind van deze paragraaf staande toelichting):

- $opp(\Delta EBC) = \dfrac{b}{b+d} \cdot \dfrac{c}{c+a} \cdot opp(\Delta EFG)$

En ook:

$$
\begin{aligned}
- \; opp(\Delta ECD) &= \frac{c}{c+a}\cdot\frac{d}{d+b}\cdot opp(\Delta EGH) \\
&= \frac{c}{c+a}\cdot\frac{d}{d+b}\cdot opp(\Delta EFG)
\end{aligned}
$$

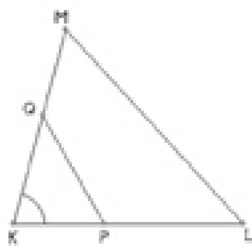
$$
\begin{aligned}
- \; opp(\Delta EDA) &= \frac{d}{d+b}\cdot\frac{a}{a+c}\cdot opp(\Delta EHJ) \\
&= \frac{d}{d+b}\cdot\frac{a}{a+c}\cdot opp(\Delta EFG)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
- \; opp(\Delta EAB) &= \frac{a}{a+c}\cdot\frac{b}{b+d}\cdot opp(\Delta EJF) \\
&= \frac{a}{a+c}\cdot\frac{b}{b+d}\cdot opp(\Delta EFG)
\end{aligned}
$$

Gevolg:

$$
\begin{aligned}
opp(ABCD) &= opp(\Delta EBC) + opp(\Delta ECD) + \\
&\quad + opp(\Delta EDA) + opp(\Delta EAB) \\
&= opp(\Delta EFG)
\end{aligned}
$$

Toelichting op de in het bewijs hierboven gebruikte 'formule'.



figuur 10

In figuur 10 zijn P en Q willekeurige punten op de zijden KL en KM van driehoek KLM.
Nu is:

- $opp(\Delta KPQ) = \frac{1}{2}\cdot KP\cdot KQ\cdot \sin(\angle K)$
- $opp(\Delta KLM) = \frac{1}{2}\cdot KL\cdot KM\cdot \sin(\angle K)$

Deling van beide relaties geeft:

$$\frac{opp(\Delta KPQ)}{opp(\Delta KLM)} = \frac{KP}{KL}\cdot\frac{KQ}{KM}$$

of:

$$opp(\Delta KPQ) = \frac{KP}{KL}\cdot\frac{KQ}{KM}\cdot opp(\Delta KLM)$$

Bron

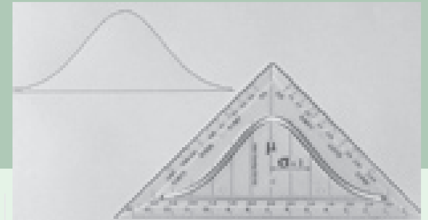
Dr. Th.G.D. Stoelinga, Dr. M.G. van Tol (1958): *Wiskunde-Opgaven van de toelatingsexamens tot de Universiteiten van 1925 tot en met 1958*. Zwolle: N.V. Uitgeversmaatschappij W.E.J. Tjeenk Willink (8e druk).

Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan het Comenius College te Hilversum.
E-mailadres: *alecluse@casema.nl*

De normaal-driehoek

[Jan Ketting]



figuur 1

Mooie plaatjes

Een jaar of vijf geleden zag ik in een winkel tussen de passers, geodriehoeken en linialen de *normaaldriehoek*. Het had de vorm en afmetingen van de geodriehoek, maar het bleek een sjabloon voor de normaalkromme te zijn (***zie figuur 1***).
Met de normaaldriehoek kun je niet alleen een mooie grafiek bij een normale verdeling tekenen, de vorm is bovendien zo gemaakt dat de standaardafwijking precies vier vakjes breed is (op kleine-ruitjespapier). Dat is handig als je de verticale lijnen wilt tekenen die horen bij $\mu - 2\sigma$, $\mu - \sigma$, enzovoort.
Op de twee rechthoekszijden van de normaaldriehoek staat een schaalverdeling van 0,001 tot 0,999 die betrekking heeft op de cumulatieve kansverdeling van de normale verdeling. Hiermee kun je vrij nauwkeurig de grenslijnen tekenen die horen bij een gegeven kans/oppervlakte.
Hoewel je er dus mooie plaatjes mee kunt maken, lijkt de normaaldriehoek geen concurrent voor de grafische rekenmachine (GR). Ik wil daar het volgende tegenover stellen.

Inzicht in de normale verdeling

De normale verdeling is een mooi stukje wiskunde (kent u de *afleiding* van de formule van de normaalkromme?), met als belangrijke eigenschap dat je elke normale verdeling kunt 'vertalen' naar de standaardnormale verdeling (Z-waarden). Dit komt bij het gebruik van de GR niet (meer) aan bod.
Dat is jammer omdat de normale verdeling daarmee gereduceerd wordt tot een knopje op de GR waardoor allerlei kenmerken van de normale verdeling verloren gaan. Met de normaaldriehoek leren leerlingen beter om schattingen te maken van kansen, grenzen, μ en σ, en krijgen daarmee meer inzicht in de normale verdeling. De normaaldriehoek legt meer nadruk op de ambachtelijke kant van de wiskunde en dat vergroot de herkenbaarheid van het vak.
Bovendien kennen veel vervolgopleidingen een college Statistiek, waar de normale verdeling zeker behandeld wordt. Daar wordt nog wel gewerkt met Z-waarden (en tabellen).
Bij meerdere statistische toetsen staat het berekenen van een vergelijkbare waarde centraal en om die reden is het dus nuttig als de basis daarvoor al op de middelbare school wordt gelegd. Een student die de normale verdeling alleen op de GR beheerst, kan die 'kennis' in de prullenbak doen en moet misschien weer helemaal van voor af aan beginnen.

Nieuwe kans?

Een jaar of twee geleden bleek dat de normaaldriehoek niet meer verkrijgbaar was en ook niet meer geproduceerd werd. Ik koester de vier exemplaren die ik bezit, maar kort geleden bedacht ik dat het toch wel jammer is dat de normaaldriehoek niet meer te koop is. Na wat speurwerk op het internet vond ik de bedenker van de normaaldriehoek, ing. Arjan Timmers. Eind vorige eeuw ontwierp hij de driehoek en dacht bij de doelgroep vooral aan studenten. Zijn vinding lijkt nu een stille dood gestorven, maar ik denk dat de normaaldriehoek een tweede kans verdient, met nu als doelgroep middelbare scholieren. Met dit artikel hoop ik een bijdrage te leveren aan een hernieuwde belangstelling voor dit ingenieuze hulpmiddel.

Naschrift van de redactie

Heeft deze normaaldriehoek bestaansrecht? Misschien zijn er collega's die graag met deze driehoek aan de slag zouden willen, als hij nog verkrijgbaar zou zijn. Met wat extra toelichting en/of lesmateriaal kan de normaaldriehoek misschien ingezet worden bij wiskunde A en wiskunde D, bijvoorbeeld in een praktische opdracht. Misschien zijn er collega's die deze driehoek achterhaald vinden, omdat het werken met Z-waarden en het standaardiseren niet meer in het programma zit nu elke leerling de beschikking heeft over een grafische rekenmachine.
We roepen u op om uw reacties door te geven aan Jan Ketting en zijn benieuwd of dit 'hulpmiddel uit de vorige eeuw' nieuw leven ingeblazen gaat worden.

Over de auteur

Drs. Jan Ketting is wiskundige en is studiebegeleider en bijlesdocent bij Instituut De Leeuw en docent wiskunde op De Nieuwe School, beide in Amsterdam.
E-mailadres: *catenius@gmail.com*

Het Geheugen



[Harm Jan Smid]

Problemen en discussies die nu het wiskundeonderwijs beheersen, hebben soms parallellen in een ver of niet zo ver verleden. Soms lijkt het of er niets veranderd is, maar vaak is het toch net even anders. In de rubriek 'Het Geheugen' pikt Harm Jan Smid zo'n actueel onderwerp op en speurt naar historisch vergelijkingsmateriaal. Soms leerzaam, bijna altijd relativerend.

Uitgerekend?!

Het zal u niet ontgaan zijn: rekenen is *hot*, misschien zelfs wel *cool.* Deze rubriek kan gevuld worden met het opsommen van alle recente artikelen, rapporten, boeken, software en websites over rekenen. Het Nationale Rekendictee haalde volop de media. Het meest verbazingwekkende was wel de aankondiging van het ministerie van OCW dat vanaf 2014 bij álle eindexamens op het voortgezet onderwijs een verplichte rekentoets komt. Daar gaat natuurlijk voor geoefend worden en daarmee is het rekenonderwijs terug van weg geweest, want eens was rekenen op het voortgezet onderwijs heel gewoon.

Rekenen op de Latijnse school

In 1815 bepaalde koning Willem I dat voortaan op de Latijnse scholen de 'beginselen der wiskunde' onderwezen moesten worden. Enige uitleg werd daarbij niet gegeven, zodat de scholen zelf maar moesten uitmaken wat dat eigenlijk inhield. Die invulling verschilde van school tot school, maar áls er wiskunde werd onderwezen (sommige scholen deden de eerste jaren gewoon niets), was daar bijna altijd rekenen bij. Een onderdeel van dat rekenonderwijs was het gloednieuwe metrieke stelsel, dat in een apart Koninklijk Besluit in 1817 op die scholen verplicht was gesteld.

Op de lagere scholen was rekenen al zo'n tien jaar eerder verplicht gesteld. Tot de negentiende eeuw was rekenen op veel lagere scholen een extraatje, waar de meester apart voor betaald moest worden. Het zou niet zo vreemd geweest zijn als het rekenen op de Latijnse school weer zou zijn afgeschaft zodra dat onderwijs op de lagere scholen op voldoende niveau was gebracht. In 1826 echter, toen de overheid het eerste Nederlandse leerplan voor wiskunde voor de Latijnse scholen vaststelde, maakten de 'gronden der rekenkunde' daar, zonder verdere toelichting, deel van uit.

Rekenkunde op de Latijnse school was vermoedelijk wel meer dan alleen maar een herhaling van wat al op de lagere school geleerd was. Natuurlijk was er het gewone cijferwerk in de 'vier speciën', zoals de bewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen genoemd werden, met gehele getallen en de 'gebrokens', zowel gewoon als decimaal. Door de invoering van het metrieke stelsel werden de decimale breuken veel belangrijker. Op het titelblad van het eerste deel van Jacob de Gelders *Allereerste gronden der Cijferkunst*, een veel gebruikt schoolboek, worden die dan ook expliciet vermeld; ***zie figuur 1***. Verder werd in de eerste helft van de negentiende eeuw ook nog heel veel aandacht besteed aan het omrekenen van allerlei oude maatstelsels in het *Nieuw Wijsgeerige Stelsel*, zoals het metrieke stelsel toen wel genoemd werd. Een heel belangrijk onderdeel was ook het rekenen met evenredigheden met behulp van de 'regel van drieën', in allerlei varianten. Die regel werd gebruikt in de beruchte 'verhoudingssommen', met als hoogtepunt geschakelde evenredigheden. U weet wel, als 17 werklui in 129 dagen 7 huizen kunnen bouwen, hoeveel huizen kunnen dan …

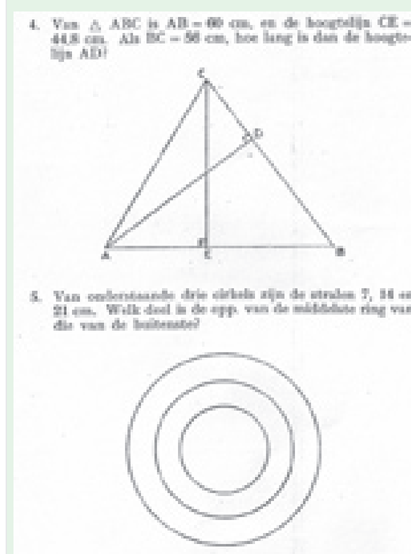
Rekenkunde of Stelkunde?

Bij de rekenkunde hoorden in de negentiende eeuw ook onderwerpen die we daar niet zouden verwachten. In het tweede deel van Jacob de Gelder's rekenboek, de *Aanleiding tot hoogere kundigheden*, werden rekenkundige en meetkundige rijen en logaritmen uitvoerig behandeld. Eigenlijk is dat niet zo vreemd. Logaritmen – *kunstgetallen* zoals ze toen ook genoemd werden – zijn immers in de zeventiende eeuw door Napier bedacht om de grote rekenpartijen die in de astronomie onvermijdelijk waren, te vergemakkelijken. Napier ontwikkelde de logaritmen door een verbinding te leggen tussen rekenkundige en meetkundige rijen. Die aanpak was in de negentiende eeuw nog gebruikelijk en dan zijn die rijen noodzakelijke voorkennis voor de introductie van de logaritmen. De logaritmentafel was het belangrijkste hulpmiddel om grote berekeningen te vereenvoudigen, en dat bleef zo



ALLEREERSTE GRONDEN
DER
CIJFERKUNST,
EERSTE DEEL.
BEVATTENDE DE VERKLARING VAN HET TIENTALLIGE STELSEL VAN TELLEN, HET BETOOG DER VIER GRONDREGELS, DE BEHANDELING DER GEWONE EN TIENDEELIGE BREUKEN;
en bijzonderlijk
DE OPGAVE EN DE VERKLARING VAN HET NIEUW INGEVOERDE STELSEL VAN MATEN EN GEWIGTEN,
DOOR
JACOB DE GELDER,
DERDE DRUK.
DOOR DEN SCHRIJVER ZELVEN AANMERKELIJK BESCHAAFD EN VERBETERD.
Te 's Gravenhage en Amsterdam,
BIJ DE GEBROEDERS VAN CLEEF.
1824.

figuur 1 Jacob de Gelder bewerkte een oudere versie van zijn Allereerste gronden der Cijferkunst speciaal voor het onderwijs aan de Latijnse scholen.

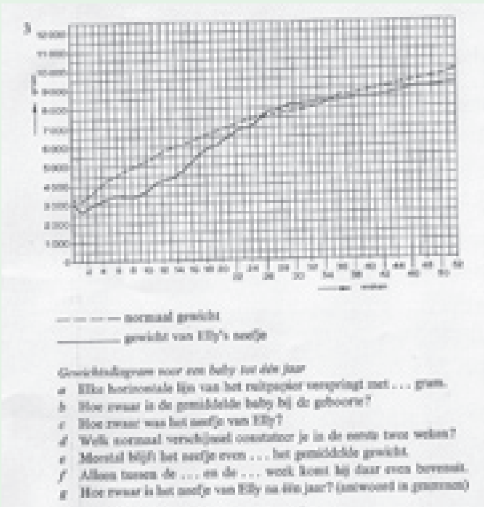


4. Van △ ABC is AB = 60 cm, en de hoogtelijn CE = 44,8 cm. Als BC = 56 cm, hoe lang is dan de hoogtelijn AD?

5. Van onderstaande drie cirkels zijn de stralen 7, 14 en 21 cm. Welk deel is de opp. van de middelste ring van die van de buitenste?

figuur 2 Uit Rekenen voor MULO van J.W. Slofstra, 17e druk uit 1958. Je moest ook wat van meetkunde weten om deze opgaven te kunnen maken.

tot de jaren zestig van de vorige eeuw, ook in het onderwijs. Die tafel werd bij de algebra behandeld, maar eigenlijk is het rekenen.
In de toelichting op de wet van 1863, die de oprichting van de HBS regelde, staat een beknopt leerplan voor wiskunde, en daarin staat als eerste bepaling dat onderwijs gegeven moest worden in ‘de rekenkunde, voor zover die niet in de lagere school behandeld is’. Toen in 1876 een nieuwe wet op het hoger onderwijs werd ingevoerd, die ook het onderwijs op de gymnasia regelde, werd ook in die wet voor de eerste klas onderwijs in de ‘reken- en stelkunde’ voorgeschreven. Jan Versluys, die de schoolboekenmarkt in die tijd domineerde, schreef een tweedelig *Beknopt leerboek der rekenkunde*, volgens de uitgever bestemd voor de eerste klassen van HBS en het gymnasium en voor de Mulo. Het eerste deel haalde negen, het tweede deel zes drukken, dus er was kennelijk een markt voor. Maar het zou kunnen zijn dat het boek vooral op Mulo-scholen gebruikt werd, waar rekenen nog heel lang een apart vak bleef. Op de HBS en het gymnasium verdween rekenen op den duur als zelfstandig vak en wat daarvan overbleef werd opgenomen binnen de algebra.



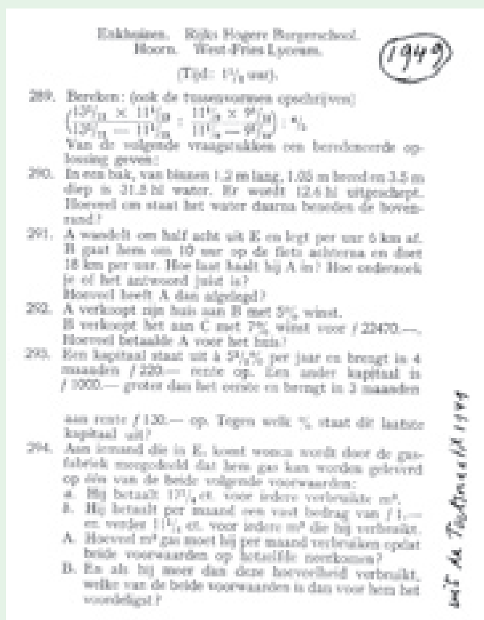
figuur 3 Een opgave uit Kom ik uit? Gedifferentieerd rekenen voor het L.H.N.O. van J.A. Mönch en H. Dekker, uit 1971. Ook toen werd er al aan grafische verwerking gedaan.

Rekenen op de Mulo en in het beroepsonderwijs

De Mulo (na 1920 wettelijk eigenlijk Ulo, maar de oude naam Mulo bleef ook in gebruik) was een schooltype dat aan het eind van de negentiende eeuw snel aan populariteit won. Er gingen veel meer leerlingen heen dan naar de HBS of het gymnasium. Formeel hoorden de Mulo-scholen tot het lager onderwijs, feitelijk waren het, zeker nadat ze in 1920 organisatorisch van de lagere scholen waren losgekoppeld, scholen voor algemeen voortgezet onderwijs. De Mulo was vooral een opleiding voor de handel en het kantoor, en dat vond zijn weerslag in het rekenonderwijs. Het berekenen van winst en verlies, het omrekenen van wisselkoersen en allerlei renteberekeningen, ook bijvoorbeeld met aandelen en obligaties waren daarin belangrijke onderdelen. Maar ook de gebruikelijke onderdelen, zoals decimale breuken, het metrieke stelsel en het rekenen met evenredigheden, vinden we weer terug. En verder stonden het vereenvoudigen van breuken, het ontbinden in factoren, de ggd en het kgv (u weet toch wel wat dat zijn?), maar ook bijvoorbeeld deelbaarheidskenmerken en eenvoudige oppervlakte- en inhoudsberekeningen op het programma; ***zie figuur 2***.
De Mulo had ook een exacte afdeling, de Mulo-B, en het rekenprogramma daar omvatte ook rekenkundige en meetkundige rijen en reeksen, inclusief ‘oneindig afdalende reeksen’. Logaritmen hoorden hier niet bij de rekenkunde, maar bij de algebra.
Rekenen was op de Mulo tot na de tweede wereldoorlog een zelfstandig examenvak, maar juist door de eigenaardige mengeling van praktische en theoretische zaken, en de overlap met andere vakken, stond het nogal eens ter discussie. Na de oorlog werd het definitief door het uitsluitend op de praktijk gerichte *handelsrekenen* verdrongen. Ook het beroepsonderwijs kende een uitgebreide rekencultuur en daar is het eigenlijk nooit verdwenen. Dat gold niet alleen voor het technisch en administratief onderwijs, ook op het ‘lager huishoud- en nijverheidsonderwijs’ (LHNO), dat vrijwel alleen door meisjes werd bezocht, werd rekenen gegeven. Nog in 1972 verscheen een *Verslag van een onderzoek naar de invoering van een onderwijsleerpakket voor het vak rekenen in het brugjaar van het nijverheidsonderwijs voor meisjes*, een groot door de overheid gesponsord project. ***Figuur 3*** geeft een idee van de opgaven die toen in het LHNO gangbaar waren.

Getoetst zal er worden

Nu gaat er dus overal weer op rekenen getoetst worden. De overheid houdt nog wat slagen om de arm, en er moet nog wat geëxperimenteerd worden, maar ondanks enig gepruttel van docenten en hun organisaties, lijkt er geen ontkomen aan. Geheel volgens de nieuwste onderwijskundige gebruiken is inmiddels een oerwoud van referentieniveaus met fundamentele en streefkwaliteiten opgetuigd, zodat straks iedere leerling wel aan enig niveau zal voldoen en gecertificeerd het leven in kan. Vroeger – daar gaat deze rubriek immers over – ging dat niet zo professioneel, maar in ieder geval wel wat eenvoudiger. Voor wie wil weten aan welk *referentieniveau* je toen op de HBS of het gymnasium moest voldoen, biedt ***figuur 4*** ruime stof tot overpeinzen. Om misverstand en te voorkomen: dat soort sommen moest je niet aan het einde, maar bij het toelatingsexamen aan het begin van de middelbare school beheersen. Maar misschien kunnen we dat examen ook weer invoeren?


Enkhuizen. Rijks Hogere Burgerschool.
Hoorn. West-Fries Lyceum.
(Tijd: 1½ uur). 1949

289. Bereken: (ook de tussenvormen opschrijven)
[illegible]
Van de volgende vraagstukken een beredeneerde oplossing geven:
290. In een bak, van binnen 1.2 m lang, 1.05 m breed en 2.5 m diep is 21.5 hl water. Er wordt 12.6 hl uitgeschept. Hoeveel cm staat het water daarna beneden de bovenrand?
291. A wandelt om half acht uit E en legt per uur 6 km af. B gaat hem om 10 uur op de fiets achterna en doet 18 km per uur. Hoe laat haalt hij A in? Hoe onderzoek je of het antwoord juist is? Hoeveel heeft A dan afgelegd?
292. A verkoopt zijn huis aan B met 5% winst. B verkoopt het aan C met 7% winst voor ƒ 22470.—. Hoeveel betaalde A voor het huis?
293. Een kapitaal staat uit à 5½% per jaar en brengt in 4 maanden ƒ 220.— rente op. Een ander kapitaal is ƒ 1000.— groter dan het eerste en brengt in 3 maanden aan rente ƒ 120.— op. Tegen welk % staat dit laatste kapitaal uit?
294. Aan iemand die in E. komt wonen wordt door de gasfabriek medegedeeld dat hem gas kan worden geleverd op één van de beide volgende voorwaarden:
a. Hij betaalt 17¼ ct. voor iedere verbruikte m³.
b. Hij betaalt per maand een vast bedrag van ƒ 1.— en verder 11¼ ct. voor iedere m³ die hij verbruikt.
A. Hoeveel m³ gas moet hij per maand verbruiken opdat beide voorwaarden op hetzelfde neerkomen?
B. En als hij meer dan deze hoeveelheid verbruikt, welke van de beide voorwaarden is dan voor hem het voordeligst?
uit de Toelatingsexamens 1949

figuur 4 Een voorbeeld van het onderdeel rekenen van een toelatingsexamen voor HBS en gymnasium anno 1949.

Over de auteur
Harm Jan Smid was lerarenopleider en medewerker wiskunde aan de TU Delft, en promoveerde daar op de geschiedenis van het wiskundeonderwijs in de eerste helft van de negentiende eeuw. Hij is momenteel voorzitter van de Historische Kring Reken- en Wiskundeonderwijs (HKRWO).
E-mailadres: *h.j.smid@ipact.nl*

Minor rekenen-wiskunde 10-14

VOOR PABO- EN WISKUNDESTUDENTEN, OOK OPEN VOOR DOCENTEN

[Frank van Merwijk]

Er wordt de laatste jaren veel gediscussieerd over de kwaliteit van het rekenonderwijs in Nederland, zowel op de basisschool als in het voortgezet onderwijs. Eén van de problemen is de gebrekkige aansluiting van het rekenonderwijs bij de overgang naar het voorgezet onderwijs. Leerkrachten van de basisschool weten niet goed hoe er in het voortgezet onderwijs wordt gerekend. Wiskundeleraren zijn niet goed op de hoogte van wat er op de basisschool gebeurt. De Minor rekenen-wiskunde 10-14 wil bijdragen aan de oplossing van dit probleem en het niveau van rekenonderwijs voor leerlingen van 10 tot 14 jaar verhogen.

Gebrekkige aansluiting

Leerlingen die net van de basisschool af komen en in het voortgezet onderwijs rekenen krijgen als onderdeel van wiskunde, moeten meestal erg wennen aan de nieuwe werkwijze die van hen verlangd wordt.
In de methodes wordt de leerlingen bijvoorbeeld bij procenten voorgeschreven, dat zij altijd eerst naar 1% rekenen, voordat ze verder gaan. Het is niet de bedoeling, dat zij in de verhoudingstabel zelf de rekenstappen kiezen, zoals zij dat op de basisschool gewend waren.
Vrijwel zonder enige voorbereiding op informeel niveau krijgen zij de regel voor het vermenigvuldigen van breuken voorgeschoteld. Ze leren, dat je breuken vermenigvuldigt door eerst de tellers met elkaar en de noemers met elkaar te vermenigvuldigen, om vervolgens de eerste uitkomst door de tweede te delen. Dat is een grote overgang, vergeleken bij de aanpak op de basisschool, waar vermenigvuldigen van breuken alleen met goed gekozen getallen wordt uitgevoerd, zodat er altijd een handige context voorhanden is om mee te rekenen. Je kunt je afvragen of hier het probleem in het voortgezet onderwijs ligt (een te grote stap verder gezet op de leerlijn breuken) of op de basisschool (te weinig gedaan aan de schematisering en de formalisering van het vermenigvuldigen van breuken). Sommige wiskundeleraren denken dat de regel voor het vermenigvuldigen van breuken nog steeds op de basisschool wordt onderwezen. Die regel is al meer dan tien jaar geleden verdwenen uit de rekenmethodes.
In het voortgezet onderwijs berekenden de leerlingen tot voor kort (vrijwel) alles op hun rekenmachine. Ik heb een brugklasleerling zelfs een keer 4 × 4 zien intoetsen. Rekenvaardigheid onderhouden is er nauwelijks aan de orde. En als de leerlingen ook nog vrij gebruik mogen maken van hun rekenmachine, dan is het begrijpelijk dat er van de rekenvaardigheid, opgebouwd in de basisschool, in het voortgezet onderwijs weinig overblijft.
Overigens wordt ook op sommige basisscholen te weinig geoefend, met name in klassen van leerkrachten die voor hun lessen nooit in de handleiding kijken en alleen uitgaan van de leerlingenboeken.
Al jaren wordt de kloof op rekengebied tussen primair en voortgezet onderwijs erkend. De rekenproblemen van beginnende pabo-studenten zijn een uitvloeisel van de genoemde verschillen in aanpak en het gebrek aan onderhoud van de rekenvaardigheid. Ook bij andere vakken, onder andere bij Nederlands, zijn er aansluitingsproblemen.

Commissie Meijerink

In 2007 benoemde staatssecretaris Van Bijsterveldt de 'Expertgroep doorlopende leerlijnen taal en rekenen' (ook bekend als de commissie Meijerink), die in januari 2008 met aanbevelingen kwam om het niveau van het taal- en rekenonderwijs voor leerlingen tussen 12 en 18 jaar te verhogen. Zij heeft daarvoor de referentieniveaus voor taal en rekenen bedacht en bijbehorende basiseisen beschreven. Die niveaus moeten binnen enkele jaren getoetst gaan worden. In het schema (***zie figuur 1*** op pag. 256) worden de niveaus en de bijbehorende opleidingen en leeftijden opgesomd. De leeftijden geven een gemiddelde aan. Een voorbeeld: bij niveau 3F staat 18 jaar, in het rapport van de commissie wordt ter toelichting toegevoegd: 17 jaar voor havisten en 20 jaar voor mbo'ers.

Minor rekenen-wiskunde 10-14: ook geschikt voor nascholing

De gewenste opbrengstverbetering aan het eind van het primair onderwijs en in de onderbouw van het voortgezet onderwijs vraagt om scholing van de aankomende en zittende docenten.
Om die reden heeft het Expertisecentrum Lerarenopleiding Wiskunde en Rekenen (ELWIeR) in samenwerking met de Open Universiteit (OU) en het Freudenthal Instituut (FI) met subsidie van het ministerie van onderwijs de minor *Rekenen-wiskunde 10-14* ontwikkeld. Daartoe is een ontwerpgroep opgericht met opleiders en ontwikkelaars uit de Hogeschool Windesheim in Zwolle, de Hogeschool van Arnhem en Nijmegen (HAN) en genoemde instellingen.
Doel van de minor is om rekenexperts op te leiden voor de bovenbouw van de basisschool en de onderbouw van het voortgezet onderwijs. Zij moeten in staat zijn rekenbeleid te ontwikkelen en vorm te geven, waarmee een vloeiende overgang van basisschool naar voortgezet onderwijs gerealiseerd wordt.
De minor staat open voor pabo- en wiskundestudenten en voor leerkrachten en docenten wiskunde die zich extra op rekenen willen toeleggen. De minor wordt dus gegeven door een tweedegraads lerarenopleiding wiskunde in samenwerking met een pabo. De minor bestaat uit drie onderdelen:

- vakinhoud;
- oefenen, onderhoud en zorg;
- stage, visieontwikkeling en actieonderzoek.

Deze onderdelen worden verderop in dit artikel beschreven. Eerst volgt een schets van rekenonderwerpen uit het grensgebied.

Grensgebied

Er zijn heel wat rekenonderwerpen die zowel in het primair als in het voortgezet

onderwijs aan bod komen. Sommige daarvan bieden onverwachte mogelijkheden om 'de grens over te gaan'. Zo is het goed denkbaar om in groep 8 met negatieve getallen te rekenen in contexten die daartoe uitdagen. Er zijn immers al leerlingen in groep 5 die spontaan met tekorten werken bij het aftrekken onder 100 en daarbij het minteken gebruiken. Op schematisch niveau: de getallenlijn wordt aan de linkerkant van de 0 uitgebreid. De verticale getallenlijn in de vorm van een thermometer is iedere leerling van groep 8 bekend. Dit leerstofonderdeel van het voortgezet onderwijs zou alvast een start kunnen krijgen op de basisschool.
Ook het in de basisschool welbekende rijtje van 100 is er een uit het grensgebied: de leerlingen maken vijf getallen in een oplopende rij, die ontstaat door de eerste twee te kiezen; de derde is vervolgens de som van de eerste en de tweede, nummer vier is de som van nummer twee en nummer drie en de vijfde krijg je weer door drie en vier bij elkaar op te tellen. Nu gaat het erom als laatste getal 100 te krijgen. Sommige leerlingen uit de bovenbouw van de basisschool ontdekken uit zichzelf dat je een nieuwe goede rij kunt krijgen door in een eerder gevonden rijtje van 100 het eerste getal met 3 te verhogen en het tweede met 2 te verlagen.
Een voorbeeld. Stel je hebt gevonden: 11, 26, 37, 63, 100. Dan is een rijtje dat begint met 14 en 24 er ook een. Dit volgt uit het feit dat het vijfde getal de som is van 2 keer het eerste getal en 3 keer het tweede. Wie dat ziet, zou de stap naar de formule $2a + 3b$ kunnen zetten. Dit is een voorbeeld van een productieve oefening die in de richting van algebra uitgebreid kan worden.
Een ander voorbeeld uit het onderdeel 'Van oefenen tot algebra' is het volgende. Beschouw de identiteit $2 \times 2 = 2 + 2$. Zijn er twee andere getallen, niet persé aan elkaar gelijk, die dezelfde uitkomst bij optelling en bij vermenigvuldiging hebben? Denk hierbij ook aan breuken.
Als iemand dan bijvoorbeeld vindt $5 \times 1\frac{1}{4} = 5 + 1\frac{1}{4}$, volgt vanzelf de vraag: zijn er meer getallen? Is er een patroon, is er een verband tussen de getallen waarvoor dit gegeven (twee getallen met dezelfde uitkomst bij vermenigvuldiging en bij optelling) nog meer geldt?
In het voortgezet onderwijs zou de strook bij breuken en verhoudingen/procenten ingezet kunnen worden voor beter begrip. De leerlingen beheersen dit model vanuit de basisschool, in het voortgezet onderwijs wordt de strook vrijwel niet toegepast.
De verhoudingstabel als vrij rekenmiddel inzetten is minder gebruikelijk in het voortgezet onderwijs. De methodes sturen al gauw aan op rekenen naar 1, om van daaruit verder te rekenen. Dat leidt tot minder begrip en maakt gebruik van de rekenmachine bij verhoudingen en procenten noodzakelijk.

Vakinhoud

De volgende reken-wiskundeonderwerpen komen aan de orde in het onderdeel Vakinhoud van de minor: breuken, kommagetallen, verhoudingen en procenten, meten en meetkunde, negatieve getallen, kolomsgewijs en cijferend rekenen, verbanden en grafieken, van rekenen naar algebra. Bij elk deelgebied wordt er gewerkt aan een gevorderd eigen niveau van rekenvaardigheid. Naast didactiek zijn bij elk deelgebied de doorlopende leerlijnen onderwerp van studie, zoals beschreven in het rapport van de commissie Meijerink en de uitwerkingen ervan. Bovendien wordt vastgesteld welke onderdelen van elk deelgebied in aanmerking komen voor regelmatig oefenen.

Oefenen, onderhoud en zorg

Het belang van het onderhouden van basisvaardigheden wordt nu ook in het voortgezet onderwijs steeds meer onderkend.
De aankondiging van de overheid om rekenen op diverse momenten in de schoolloopbaan van de leerlingen te toetsen, helpt. Zo is het inmiddels niet meer zo, dat de rekenmachine elk moment in de reken-wiskundeles mag worden gebruikt. Selectief en inventief gebruik van de rekenmachine kan het onderhoud van rekenvaardigheden bevorderen.
Daarvoor is het ook van belang dat er regelmatig en op inspirerende wijze geoefend wordt.
In dit minoronderdeel komen de diverse functies van oefenen ter sprake. Nieuwe ontwikkelingen als het zOEFi-project en 'gedachtenvol oefenen' komen aan de orde, naast bestaand materiaal op rekenweb, in methodes en in andere bronnen.
De rekenmachine wordt bekeken op zijn verschillende functies: als rekenhulpmiddel, generator van rekenspelletjes en middel tot didactisch onderzoek. De mogelijkheden ervan worden onderzocht, uitgebreid en uitgeprobeerd.
In dit cursusonderdeel is er ook ruime aandacht voor de differentiatie in de reken-wiskundeles. Daarnaast komt aan de orde, hoe effectief te handelen bij rekenachterstand, -problemen, -stoornis en dyscalculie. Ook de begeleiding van hoogbegaafde leerlingen is een belangrijk onderwerp.
Ervaringen in de praktijk komen aan de orde, nieuwe ideeën en materialen worden uitgeprobeerd en zijn onderwerp van nabespreking en reflectie.

Stage, visieontwikkeling en actieonderzoek

Gecombineerde koppels van pabo- en vo-studenten voeren tijdens de stage actieonderzoek uit, dat start vanuit onderzoeksvragen en interviews met leerkrachten en docenten. Vervolgens oriënteren de koppels zich op een onderwerp en organiseren minstens één informatieve bijeenkomst op de opleiding. Ze ontwikkelen onderwijs om in de stage uit te proberen. Dat levert ongetwijfeld weer vragen op voor vervolgonderzoek. De koppels lopen zowel stage op een basisschool als op een school uit het voortgezet onderwijs.
Mochten er docenten aan de minor meedoen, dan kunnen tweetallen studenten wellicht ook bij hen stage lopen.
Op veel scholen voor voortgezet onderwijs wordt gewerkt aan een beleidsplan voor rekenen, of men heeft plannen in die richting. Daaraan kunnen de studenten van de minor direct een bijdrage leveren, bijvoorbeeld in de vorm van een onderzoeksopzet, het uitproberen van lessen en toetsen en de verwerking van de resultaten ervan.
De student sluit het onderdeel Vakinhoud afzonderlijk af, voor de andere twee onderdelen bouwt hij een portfolio op. Daarin neemt hij op: zijn oefenontwerpen en zijn ervaringen daarmee, zijn onderzoek, zijn verrichtingen in de stage, de opzet van de door hem georganiseerde inhoudelijke bijeenkomst en de reflectie daarop en alle andere acties en reflecties en ook zijn visie op het ideale onderwijs in het kader van de doorlopende leerlijnen rekenen.

Deelnemende docenten

Docenten die aan de minor meedoen, nemen deel aan de onderdelen Vakinhoud en Oefenen, onderhoud en zorg. Hun aandeel in de stage wordt in goed overleg vastgesteld. Het zwaartepunt van hun stageaandeel zal vermoedelijk (een bijdrage aan) het rekenbeleidsplan van de eigen school zijn. Deze docent kan met de bij hem geplaatste studenten een gezamenlijk onderzoek doen, of ook de betrokken afzonderlijke, maar samenhangende deelonderzoeken doen.

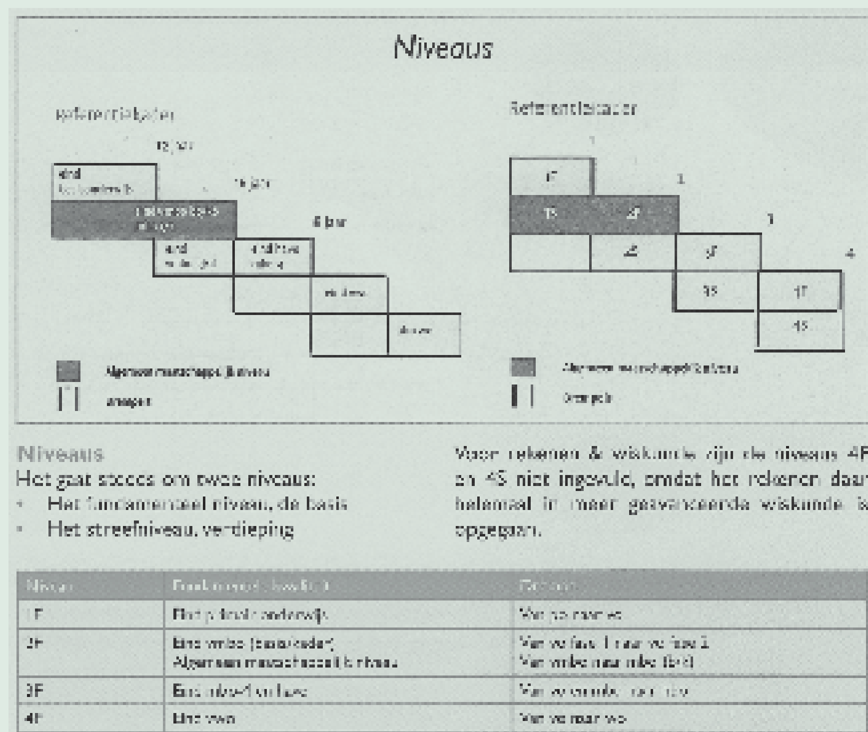
Scholingsaanbod

In februari 2011 biedt de HAN de minor in Nijmegen aan. De studenten en docenten die rekenexpert willen worden, kunnen zich komend cursusjaar dus bij de

HAN opgeven. Wellicht gaan ook andere hogescholen deze minor aanbieden, nu de materialen beschikbaar zijn (zie de volgende paragraaf).
Op basis van de uitgangspunten en materialen van de minor is een nascholingscursus van 13 bijeenkomsten georganiseerd, bestemd voor leraren basisonderwijs en wiskunde. Deze is in maart 2010 van start is gegaan en wordt in februari 2011 afgesloten. De cursus wordt gegeven op het Freudenthal Instituut in Utrecht door de ontwikkelaars Jan Haarsma, Nathalie de Weerd en Frank van Merwijk en is een samenwerking van de HAN, Hogeschool Windesheim en het Freudenthal Instituut. De onderdelen Vakinhoud en Oefenen, onderhoud en zorg worden aangeboden, daarnaast maken de cursisten een (opzet voor een) rekenbeleidsplan voor hun school. De studiebelasting is ongeveer 120 uur.
Op 7 september gaat een tweede nascholing met dezelfde inhoud van start, in Utrecht of in Zwolle al naar gelang de gemiddelde thuisbasis van de aanmelders. Hiervoor kunnen zich nog deelnemers opgeven bij Jan Haarsma van Hogeschool Windesheim (e-mailadres: *jgcj.haarsma@windesheim.nl*). Meer informatie vindt u op *www.rekenen10tot14.nl*.

Materialen beschikbaar

Sinds begin april zijn de cursusmaterialen voor lerarenopleidingen beschikbaar. Zij worden uitgegeven door het Ruud de Moorcentrum van de OU, zowel in een handige ringband als digitaal. De enige eis van de ontwikkelaars is dat de gebruikers hun ervaringen met een minor of een nascholing met hen delen.
Informatie kunt u opvragen bij de OU (e-mailadres: *rdmc@ou.nl*) of de HAN (e-mailadres: *frank.vanmerwijk@han.nl*).



figuur 1 Illustratie uit ‘Rekenen in het voorgezet onderwijs’ van Hoogland e.a. (uitgever: APS)

Literatuur

- K. Buijs e.a. (2008): *Werken aan de doorlopende leerlijn rekenen-wiskunde van po naar vo*. Enschede: SLO.
- Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen (2008): *Over de drempels met taal en rekenen*. Enschede: SLO.
- F. Garssen (2010): *Gedachtenvol oefenen*. In: *Volgens Bartjens* 29-3. Assen: Koninklijke Van Gorcum.
- K. Gravemeijer e.a. (2010): *Aansluitingsproblemen tussen primair en voortgezet onderwijs*. In: *Panamapost* 28-4. Utrecht: FIsme.
- K. Hoogland e.a. (2009): *Rekenen in het voortgezet onderwijs*. Utrecht: APS.
- A. Noteboom (2008): *Minimumdoelen rekenen-wiskunde, niveau 1F, einde basisschool*. Enschede: SLO

Websites

- Kennisbank Rekenen: *www.kennisbankrekenen.nl*
- TULE (SLO): *http://tule.slo.nl*
- zOEFi: *www.fi.uu.nl/zoefi*
- Minor Rekenen 10 tot 14: *www.rekenen10tot14.nl*

Over de auteur

Frank van Merwijk is lerarenopleider wiskunde aan de tweedegraads opleiding van het ILS te Nijmegen en opleidingsdocent aan de Pabo Arnhem (beide instituten zijn onderdeel van de HAN).
E-mailadres: *Frank.vanMerwijk@han.nl*

Dit was vet juf!

[Kim Kaars]

Minor Educatie

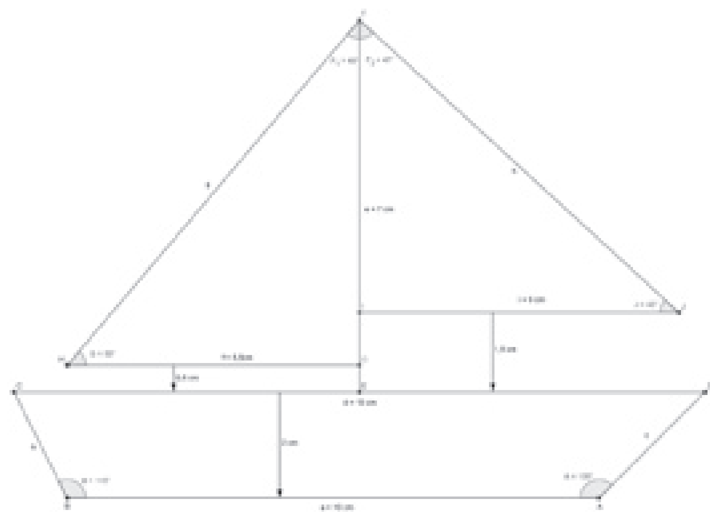
Als student Industrieel Ontwerpen aan de TU Delft ben ik in september 2009 begonnen met een minor Educatie als onderdeel van mijn bachelorprogramma. In deze minor heb ik een half jaar lang didactiekvakken gevolgd en me helemaal gericht op het wiskundeonderwijs en het lesgeven. Zo heb ik tijdens deze minor op twee scholen stage gelopen, eerst een snuffelstage, daarna een iets uitgebreidere stage met veel meer lesgeven en veel meer eigen invulling.

Eerdere werkbladen

Tijdens de tweede stage heb ik lesgegeven in een brugklas vmbo-T/havo. Op het moment dat ik daarmee begon (halverwege november), waren de leerlingen bezig met een hoofdstuk over evenwijdige en loodrechte lijnen en het tekenen en meten van hoeken. Dit zijn onderwerpen die je vooral heel veel moet oefenen om ze goed onder de knie te krijgen. De leerlingen hadden al veel geoefend met werkbladen hierover en ze zouden nog veel meer gaan oefenen. In eerste instantie ben ik verder gegaan met werkbladen die eenzelfde opzet hadden als die waar ze al eerder mee geoefend hadden. In deze eerdere werkbladen stonden eigenlijk vooral opdrachten als 'teken een evenwijdige lijn op 3 cm afstand van lijn *b*' en 'teken een loodrechte lijn op lijn *k*'. Dit zijn goede oefeningen, maar worden al snel saai als ze regelmatig terugkomen.
Een deel van de leerlingen uit de klas vond deze werkbladen heel lastig en was veel tijd kwijt met het maken van de opgaven; het andere deel van de leerlingen was snel klaar en maakte de opgaven zonder problemen. Deze snelle leerlingen konden verder met het huiswerk, of met een ander werkblad. Vaak hoorde ik de leerlingen alweer zuchten en steunen zodra ze in de gaten kregen dat er weer een nieuw werkblad klaar lag. Met deze reactie vanuit de klas heb ik iets gedaan.
Op de donderdag de week erna stond er opnieuw een werkblad op het programma. Ik vond dat er iets moest veranderen zodat de leerlingen niet weer met tegenzin aan de slag zouden gaan. In overleg met mijn docent vakdidactiek van de TU, Jeroen Spandaw, kwam ik op het idee om een werkblad met een tekenvoorschrift voor een zeilboot te maken. Wanneer de leerlingen dit tekenvoorschrift stap voor stap zouden volgen, kwam er een tekening uit die in zijn geheel opgebouwd was uit loodrechte en evenwijdige lijnen en hoeken.

Werkblad zeilboot

Het maken van het werkblad heeft me veel tijd gekost, maar was ontzettend leuk om te doen. Allereerst moest er een geschikte tekening van een zeilboot ontworpen worden; ***zie figuur 1***. Daarna moest er een stappenplan voor het maken van de tekening gemaakt worden dat de leerlingen goed konden volgen. Het resultaat was een lijst met achttien opdrachten die de leerlingen stap voor stap moesten uitvoeren, afgewisseld met vier controlevragen; ***zie figuur 2***.
Toen de leerlingen die donderdag het lokaal binnen kwamen voor de wiskundeles,



figuur 1

Tekenvoorschrift

1. Teken een horizontale lijn a met een lengte van 10 cm. Noem het rechteruiteinde van de lijn punt A en het linkeruiteinde van de lijn punt B.
2. Teken in punt B een hoek van 115°. Teken het been van de hoek omhoog en niet te dik zodat je later nog een stukje uit kunt gummen. Noem dit been b en zet de letter erbij.
3. Teken in punt A een hoek van 135°. Ook dit been gaat omhoog en is het belangrijk dat je de lijn niet te dik tekent zodat je nog een stukje uit kunt gummen. Noem dit been c en zet de letter erbij.
4. Teken een lijn d evenwijdig met lijn a op 2 cm afstand van lijn a. Teken deze lijn boven lijn a en noem deze lijn d.
5. Deze evenwijdige lijn snijdt op een gegeven moment lijn b en lijn c. Zet een punt op deze plekken en noem deze punten C en D.
6. Hoeveel centimeter is deze evenwijdige lijn d lang?

....

7. Gum de rest van de benen van de hoeken uit.
8. Teken een punt in het midden van de lijn d en noem dit punt E. Zet de letter erbij.
9. Teken vanuit dit punt E een loodrechte lijn van 7 cm naar boven. Noem deze lijn e en zet de letter erbij.
10. Noem het bovenste uiteinde van deze lijn punt F en zet ook hier de letter bij. Let op het verschil tussen hoofdletters en kleine letters!
11. Zet op de lijn e een punt G op 0,5 cm afstand van punt E.
12. Teken vanuit dit punt G een evenwijdige lijn met lijn d naar links (op 0,5 cm afstand van lijn d). Deze evenwijdige lijn wordt 5,5 cm. Noem deze lijn f.
13. Teken aan het uiteinde van deze lijn het punt H en zet de letter erbij.
14. Teken in dit punt H een hoek van 50°. Trek het been schuin omhoog net zolang door tot je bij het uiteinde van lijn e komt, in punt F dus.
15. Hoe groot is de hoek die je nu bij punt F getekend heb?

....

16. Noem de lijn die je net getekend heb lijn g en zet de letter erbij.
17. Teken nu aan de andere kant van lijn e vanuit het punt F een hoek. Deze hoek wordt 47°. Teken het been van de hoek weer niet te dik zodat je straks nog een stukje uit kunt gummen.
18. Zet op het lijn e een punt I op 1,5 cm afstand van punt E.
19. Teken vanuit dit punt I een loodrechte lijn op lijn f naar rechts. Maak deze lijn 6 cm lang. Noem de lijn i en zet de letter erbij.
20. Is deze lijn evenwijdig met lijn f?

....

21. De lijn i kruist op een gegeven moment het been van de hoek die je net getekend heb. Zet op dit kruispunt een punt en noem het punt J. Noem het been van de hoek lijn h en zet de letters erbij. Gum de rest van het been uit.
22. Hoe groot is de hoek in het punt J?

....

figuur 2

was de eerste reactie weer veel gezucht en gesteun, 'Niet alweer een werkblad juf!' Mijn reactie hierop was: 'Wacht maar, het wordt vast een stuk minder vervelend als jullie zien wat ik voor jullie gemaakt heb!'
Na een korte toelichting over het werkblad en het doel ervan (het toepassen van hoeken en loodrechte en evenwijdige lijnen in de praktijk) deelde ik de werkbladen uit. 'Wat is dit nou weer voor een lange lijst met opdrachten?', was de reactie. 'Ga nou maar aan de slag, dan zul je zien wat er uit komt…', waarop de leerlingen aan het werk gingen en ik rondliep om te zien wat ze ervan zouden maken.
Na een tijdje ontstonden de eerste contouren van de bootjes en waren de leerlingen in opperste concentratie bezig met het maken van het werkblad. 'Mevrouw, wordt het een boot?', 'Klopt dit, mevrouw?, 'Gaat het goed zo?', begonnen de leerlingen langzaamaan te vragen. Na een kleine 20 minuten waren de eerste, snelle leerlingen klaar en stonden de eerste zeilboten op papier. Niet veel later waren ook de meeste andere leerlingen naar hun idee klaar. De reacties vanuit de klas waren alleen maar ontzettend positief, de leerlingen hadden niet verwacht dat het zo leuk kon zijn om lijnen en hoeken op zo'n andere manier toe te passen.
Niet alle boten waren even goed. Dat er bij sommige leerlingen nogal wat fouten in zaten, kwam voornamelijk door slordig lezen en het daardoor niet goed uitvoeren van enkele stappen. Daarnaast merkte ik dat veel leerlingen moeite hadden met het op de juiste plek zetten van de letters in de tekening. Maar het begrip over hoeken en evenwijdige en loodrechte lijnen was er wel. Toen de meeste leerlingen klaar waren, heb ik het werkblad nabesproken en via het smartboard laten zien wat het resultaat zou moeten worden. De leerlingen die boten getekend hadden die in werkelijkheid nooit zouden kunnen varen, zagen nu ook in wat er niet helemaal klopte en konden verder met het verbeteren of opnieuw tekenen van de zeilboot.

Evaluatie
Na het maken van het werkblad moesten de leerlingen hun uitkomsten inleveren opdat deze konden worden nagekeken. Het cijfer zou als bonuspunt mee tellen bij hun proefwerk. Daarom heb ik ze iets meer tijd gegeven om het te maken en heb ik ook de volgende les (op vrijdag) aan het werkblad besteed.
Die vrijdag waren de leerlingen weer druk bezig met het werkblad en kwamen er veel meer goede boten op papier. Tegen het eind van deze les was bijna de hele klas de zeilboten aan het inkleuren, terwijl ook Sinterklaas en Zwarte Piet en stapels vol cadeautjes erin getekend werden.
De leerlingen waren nog steeds heel erg enthousiast over het werkblad. Halverwege het tweede uur kwam er een jongen die het normaal allemaal wel goed vindt en lekker met zijn vriendjes aan het kletsen is, naar me toe met de vraag: 'Mevrouw, mag ik nog zo'n blad?' Ik zei tegen hem: 'Maar ik heb de opdracht gister toch al uitgedeeld? Als je hem kwijt bent, moet je even bij je buurman kijken, ik heb nu geen lege werkbladen meer.' Waarop hij reageerde: 'Nee, ik bedoel nog zo'n soort opdracht. Dit was vet juf!'
Dit soort reacties zijn natuurlijk ontzettend leuk om te krijgen, vooral wanneer ze spontaan uit de klas komen. Ik vond het erg mooi om te zien hoe enthousiast de leerlingen werden van mijn werkblad en hoe hard ze ermee aan de slag waren tijdens de lessen. Omdat ik nog met mijn opleiding bezig ben, ben ik nog volop bezig met mijn portfolio. Dit werkblad voeg ik hier uiteraard aan toe. Om mijn indruk van de mening van de leerlingen over dit werkblad in mijn portfolio te kunnen onderbouwen heb ik een korte enquête gehouden onder een deel van de klas. De reacties die hieruit kwamen, waren eigenlijk allemaal positief. Bijna alle leerlingen die de enquête ingevuld hebben, geven aan dat ze het maken van het werkblad met de zeilboot heel leuk vonden en dat ze in het vervolg best vaker van dit soort werkbladen willen maken. Daarnaast geven ze allemaal aan dat ze een beter beeld hebben gekregen van het gebruik van deze stof en dat wiskunde meer is dan alleen maar sommen maken.

Over de auteur
Kim Kaars is studente Industrieel Ontwerpen aan de TU Delft en volgt de minor Educatie. Voor haar stage gaf ze lessen op het Stanislas College in Pijnacker. Na haar studie Industrieel Ontwerpen is ze van plan om verder te gaan in het onderwijs en ook hiervoor een opleiding te volgen.
E-mailadres: *kimkaars@gmail.com*

Persbericht / Math4All

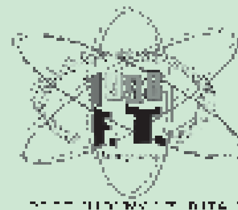
GeoEnZo en Math4All gaan samenwerken
GeoEnZo is een gratis programma waarmee het digitale schoolbord in de wiskundeklas als dagelijks instrument kan worden gebruikt. Het voorziet in alles wat de docent in zijn dagelijkse lespraktijk nodig heeft en biedt daarbij veel digitale voordelen. Bijzonder opvallend is de lage leerdrempel van GeoEnZo; zelfs de meest behoudende wiskundedocent kan zonder handleiding meteen met GeoEnZo uit de voeten.
Stichting Math4All heeft tot doel om kwalitatief uitstekend lesmateriaal gratis digitaal ter beschikking te stellen aan het voortgezet onderwijs. Voor de meeste wiskundedocenten is Math4All een begrip; zij maken regelmatig hun keuze uit de imposante hoeveelheid educatief materiaal die op de site van Math4All wordt aangeboden.

Niet goedkoop
Het is geen wonder dat Math4All en GeoEnZo elkaar gevonden hebben. GeoEnZo past namelijk naadloos in de filosofie van Math4All, die zich laat samenvatten in de slogan 'Gratis maar niet goedkoop'. GeoEnZo is gericht op het Nederlandse wiskundeonderwijs en verovert door de intuïtieve, stabiele en snelle werking in rap tempo de Nederlandse klaslokalen.

Plannen
Over enige tijd zal er geen wiskundelokaal zonder digitaal bord meer in Nederland te vinden zijn. Math4All en GeoEnZo zitten daarom bovenop de ontwikkelingen op dit gebied. Gestuurd door wensen uit de praktijk, komen er heel frequent nieuwe versies van GeoEnZo uit.
Vanaf heden is de nieuwste versie van GeoEnZo, inclusief Nederlandstalige handleiding, gratis te downloaden op *www.math4all.nl*.

Info
Stichting Math4all, Waterhoen 42, 7423 CR Deventer

Het WwF helpt een school in Bolivia



In 2009 heeft het Wereledwiskunde Fonds (WwF) een project gefinancierd in Bolivia. Een middelbare technische school heeft 5 computers, een scanner, 32 boeken en een aantal didactische spellen kunnen aanschaffen. Het was de eerste keer dat het WwF een project ondersteunde waarbij het merendeel van het geld werd besteed aan computers. Dit artikel is een vertaling uit het Spaans van documenten opgesteld door Oscar Zabalaga, onze contactpersoon bij dit project, en Jhonny Zurita, wiskundeleraar van de betreffende school.

De ligging van de school en de economische situatie

Het 'Instituto Técnico Vocacional Franz Tamayo' is een school voor middelbaar technisch beroepsonderwijs. De school ligt in de gemeente Sacaba, 20 kilometer van de hoofdstad Cochabamba van het gelijknamige departement. Het is een landelijk gebied, op een hoogte van 2855 meter. Cochabamba is het centrale departement van Bolivia; er heerst een gematigd klimaat met een gemiddelde temperatuur van 18°C, een winterperiode met een minimumtemperatuur tot -1,5°C en een lente en zomer met een maximumtemperatuur van 32°C.

Zoals in het hele land overheerst de werkeloosheid. De laatste jaren is de informele handel de voornaamste bron van inkomsten in dit gebied; de meeste mensen zijn arbeider en handelaar tegelijkertijd. Anderen werken in de stad Cochabamba en velen zijn naar het buitenland geëmigreerd, naar Spanje, Italië en andere landen.

Op gastronomisch gebied is de streek bekend vanwege zijn keuken gebaseerd op konijn, cavia en eend.

De culturele situatie

De oorspronkelijke taal is het quechua en de tweede taal is Spaans. Ongeveer 90% is katholiek, onder de resterende 10% bevinden zich joden, protestanten en leden van de Pinkstergemeente.

Het grootste deel van de bewoners is afkomstig uit dit gebied, maar er zijn ook mensen komen wonen uit andere departementen, zoals uit Oruro en Potosí.

De school

Het 'Instituto Técnico Vocacional Franz Tamayo' werd opgericht in augustus 1998, omdat de bevolking de jaren daarvoor flink was gegroeid. Het doel is om goed gekwalificeerde studenten op te leiden met een einddiploma middelbare technische school. De school telt momenteel 18 leraren; ze hebben een academische opleiding gehad of een technische lerarenopleiding.

Wat betreft het pedagogische aspect: er heerst een goede teamgeest bij de docenten, zodat er een adequate samenwerking mogelijk is bij alle activiteiten die de onderwijseenheid realiseert. Bovendien is er een goede communicatie en er wordt in hoge mate meegewerkt aan de besluiten van de directeur.

Studierichtingen zijn: informatica, elektronica, werktuigkunde, naai- en confectiewerk.

Er zijn 13 leslokalen en 3 werkplaatsen, die echter onvolledig zijn uitgerust. Er is onvoldoende meubilair, evenzo is er gebrek aan didactisch materiaal bij alle vakken en er zijn geen onderzoekslaboratoria; een bibliotheek ontbrak en er was geen computerlokaal. Dat vinden we een groot gemis, omdat we dat heel belangrijk achten voor de vorming van de gediplomeerden.

Het instituut heeft geen geschikte sanitaire basisvoorzieningen.

Het onderwijs wordt gegeven op basisniveau met de 7e en de 8e graad en het voortgezet niveau met de 1ste t/m de 4e graad; gemiddeld 30 leerlingen per cursus.

Elk jaar wordt er een werkplan goedgekeurd. Daaraan voorafgaand zijn er projecten om vernieuwingen in het curriculum te testen die gericht zijn op het bereiken van verbeteringen in het leerproces.

De leerlingen, georganiseerd in een 'Gabinete Estudiantil', ondersteunen de initiatieven van de docenten en de directeur om de kwaliteit te verbeteren, zodat ze zonder problemen toegang kunnen krijgen tot technische en ingenieursstudies en deze ook met succes kunnen afsluiten.

De gemeenschap

Er is weinig contact tussen de school en de gemeenschap. Iedere leraar neemt individueel contact op met de ouders van de leerlingen van zijn cursus. Er is echter wel een schoolraad, gevormd door een groep ouders, gekozen tijdens een bijeenkomst in het begin van het schooljaar, en deze werkt samen met de directeur en het onderwijzend personeel. Op die manier zorgt de schoolraad voor een vlotte interactie met de gemeenschap. De schoolraad kent de wijze van functioneren van de onderwijsunit perfect doordat zij meewerkt aan het programmeren van de schoolactiviteiten.

De dorpelingen hebben geen duidelijke culturele identiteit en er bestaat een afwijzing van de moedertaal.

Dientengevolge werkt het personeel van de school intensief aan het opkrikken van het zelfrespect van leraren en leerlingen en wil op die manier de leerstandaarden op humaan en technisch gebied verhogen.

Motivatie van de aanvraag

Wanneer tegemoet wordt gekomen aan de recreatieve wiskunde in de ontwikkeling van het redeneren, weten wij dat het leren van de formele wiskunde in de klas beter gaat. De huidige practicumlerares ziet de noodzaak van verbetering van het wiskundecurriculum in vanwege de volgende redenen:

- het culturele bewustzijn in stand houden als een product van menselijke schepping;
- bijdragen aan het denkvermogen van de mens door gereedschap te verschaffen dat de mens in staat stelt om vooruit te lopen op hetgeen komen gaat;
- het creatieve denkvermogen van de leerlingen stimuleren.

Deze initiatieven worden in het algemeen niet door alle leerlingen gewaardeerd. De meesten hebben gedurende hun schooltijd een weerzin tegen wiskunde. Dat heeft

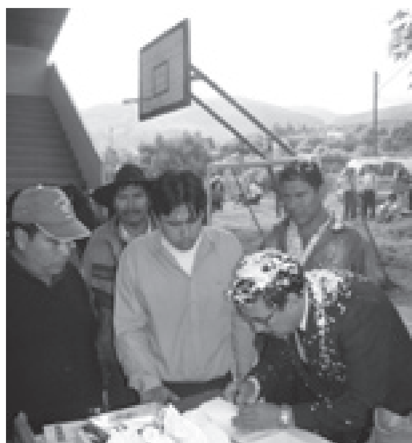


foto 1 Oscar Zabalaga zet handtekening bij de overdracht van de boeken



foto 2 De boeken worden geplastificeerd



foto 3 Jhonny Zurita, een trotse leraar



foto 4 Verkoop van de 'rellenos'

verschillende oorzaken, maar de belangrijkste is dat wiskunde op hen overkomt als koud, onveranderlijk, ver van hun bed en moeilijk. Daarom willen de docenten bij de leerlingen het leren van recreatieve wiskunde verstevigen door middel van didactische wiskundige spellen op het gebied van logisch redeneren op verscheidene niveaus. Dit impliceert dat zij de recreatieve wiskunde ter hand nemen om logisch redeneren te ontwikkelen.
Vernuftige spellen en andere recreatieve wiskundige activiteiten moeten motiveren om wiskunde te leren en dit moet een interessante uitdaging zijn zowel voor individuele acties als voor groepswerk.
De leerlingen zouden dan bovendien een logische, mathematische manier van denken bereiken waarmee ze verschillende, zich voordoende problemen kunnen oplossen met reeds bekende wiskundige instrumenten. Evenzo zouden ze dan de wiskundige symboliek nauwgezet gebruiken bij het oplossen van problemen. Ze zouden persoonlijke strategieën uitwerken om concrete situaties te analyseren en volharden in het zoeken naar oplossingen.

De gift van het WwF zal het mogelijk maken wiskunde te leren kennen en er plezier aan te beleven, als ook om te gaan beseffen welke belangrijke rol dit vak speelt in de technologisch-wetenschappelijke en culturele ontwikkeling.
Wij hebben computers aangevraagd omdat deze bij ons onderwijs onmisbaar zijn. Wij gaan daarop installeren: *Office* en programmeertalen zoals *Visual Basic* en *Delphi*; de meest gebruikte in onze omgeving. Verder zullen worden geïnstalleerd: *Maple 10*; handboeken om Engels idioom te leren, verplichte materie in het voortgezet niveau; encyclopedieën zoals *Encarta*; wiskundeboeken zoals het boek van de schrijver Aurelio Baldor, dat veel gebruikt wordt op onze middelbare school in het basisniveau; en nog vele andere programma's. Ook internet zal worden geïnstalleerd opdat de studenten kunnen surfen op zoek naar informatie voor hun verschillende vakken. Kort samengevat: het academisch niveau van de studenten wordt zichtbaar verhoogd.

Infrastructuur

De directie van de school heeft ervoor gezorgd dat een lokaal werd bestemd uitsluitend voor de implementatie van dit project.
Om deze ruimte geriefelijk te maken heeft de schoolraad besloten tot de aanschaf van het noodzakelijke meubilair dat het bestaande aanvult.

Gerealiseerde activiteiten

Wiskundeleraar prof. Jhonny Jaime Zurita Sanchez:
Op zondag 19 april 2009, nadat wij de boeken en computers ontvangen hadden van ingenieur Oscar Zabalaga (***zie foto 1***), zijn we begonnen met het plastificeren van de boeken om ze een betere bescherming te geven (***zie foto 2***). Bovendien hebben we de boeken gecodeerd, want ze horen bij verschillende niveaus.
Vrijdag 1 mei hebben we de vrije dag benut om samen met de leerlingen het logo (***zie boven***) en het pasje voor de bibliotheek te maken.
Op maandag 4 mei kwamen de leerlingen het wiskundelokaal binnen, maar omdat het leerlingenbestand tamelijk groot is en we nu vijf computerinstallaties hebben – hetgeen te weinig is voor de leerlingen om goed te kunnen leren – is besloten om 's morgens de klassen in twee groepen op te delen; de eerste van 9 tot 10 uur en de tweede van 11 tot 12 uur. 's Middags zullen de klassen hun normale lesprogramma volgen.
Toen ik het enthousiasme zag waarmee de leerlingen op de computers werkten en dingen onderzochten, kwam ik op het idee om internet op de computers te installeren. Om dat te realiseren hebben we samen met de cursisten iets georganiseerd om fondsen te verzamelen voor de bibliotheek en met elkaar afgesproken dat we 'rellenos' (een soort pasteitjes; ***zie foto 4***) zouden verkopen. Met deze verkoop konden wij kosten zodanig reduceren dat wij beschikten over meer geldmiddelen. Door middel van internet kunnen de leerlingen problemen en vragen onderzoeken en nadenken over modellen; de essentie is dat de leerlingen zich beraden over hun eigen denkproces met het doel dat ze meer kennis verwerven. Door middel van het leren van de wiskunde op de computers ontwikkelen de leerlingen het denkvermogen en de bekwaamheid van logische reflectie. Tegelijkertijd verwerven ze een verzameling zeer machtige instrumenten om de werkelijkheid te onderzoeken, af te beelden en waar te nemen.
Om het werk aantrekkelijk en leuk te maken organiseren we samen met de leerlingen schaakwedstrijden.

Wat betreft het programma dat onderwezen wordt, dat is *Maple 10*; het is een gereedschap voor de volledige oplossing van verschillende wiskundige problemen; daarmee worden op niveau A2 en B2 elementaire rekenkundige bewerkingen gemaakt als ook opgaven uit de groepentheorie. Met de leerlingen van het 4e semester gebruiken we het programma voor de uitvoering van berekeningen met limieten, afgeleiden, integralen en op niveau A3 en B3 voor de oplossing van vergelijkingen.

De school heeft een feest georganiseerd bij de overdracht van de materialen. Het wiskundelokaal werd op Boliviaanse manier ingewijd: een kruik met een maïsdrank werd voor het lokaal op de grond stuk gegooid, zodat *Pacha Mama* (moeder aarde) de vloeistof tot zich kan nemen. Op het schoolplein werden toespraken gehouden door notabelen; leerlingen droegen een spandoek waarop het WwF in Holanda werd bedankt, en er werd voor het WwF gedanst.

Info

Contactpersoon voor het WwF in Bolivia was ing. Oscar Zabalaga. Hij is hoofd van de studierichting Civiele Techniek aan de Universidad Mayor de San Simon in Cochabamba. Als docent numerieke analyse is hij goed op de hoogte van de eisen die aan de studenten worden gesteld. Hij heeft de wiskundesectie van het 'Instituto Técnico Vocacional Franz Tamayo' geadviseerd bij de aanschaf van het materiaal.

Contactpersoon WwF in Nederland: *Juliëtte Feitsma*
E-mailadres: *juliettefeitsma@kpnplanet.nl*
Website: *www.nvvw.nl/page.php?id=1813*

Persbericht / Scholenprijs NWO



foto 1 V.l.n.r. Ruben Oost, Klaas Hakvoort, Gerard Veerbeek, docent Klaas Braam, Sander Visser en Roel van Oosten

Emmeloord, 23 maart 2010

In de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 2010 heeft het Emelwerda College uit Emmeloord de scholenprijs gewonnen!
Verantwoordelijk voor dit fantastische resultaat zijn Klaas Hakvoort, Ruben Oost, Roel van Oosten, Gerard Veerbeek. Sander Visser (leerlingen 5-vwo) en hun docent K. Braam.
De scholenprijs gaat naar de school met de hoogste somscore van de beste vijf leerlingen. Het maximale aantal te behalen punten is 180; het Emelwerda College behaalde er 131.

Maximale score

Emelwerda-leerling Ruben Oost wist zelfs de maximale score te behalen. Slechts 8 van de 4150 deelnemers is dit gelukt. Een prestatie van formaat!

Nederlandse Wiskunde Olympiade (NWO)

De NWO is een jaarlijkse wiskundewedstrijd voor havo/vwo-scholieren. De NWO is niet alleen bedoeld voor de 'bollebozen', maar voor elke leerling die zich uitgedaagd voelt door een probleem waarin ongebruikelijke, leuke en niet-erg-schoolse wiskunde aan de orde komt.

Door naar de tweede ronde

In totaal gaan 15 leerlingen van het Emelwerda College door naar de tweede ronde. Deze ronde vindt op vrijdagmiddag 26 maart op tien universiteiten tegelijk plaats. De leerlingen van het Emelwerda College gaan de strijd aan op de Rijksuniversiteit in Groningen.

Toegevoegd door de redactie van Euclides

Onderstaand nog een enkel feit uit de uitslag van de eerste ronde.
Dit jaar konden scholen zich voor het eerst via internet aanmelden en hun resultaten invoeren. In totaal hebben 226 scholen de scores van hun leerlingen doorgegeven. Er deden 4150 leerlingen mee aan de eerste ronde. Dit zijn er helaas iets minder dan vorig jaar, maar nog steeds ruim meer dan de jaren ervoor.
De verdeling van de deelnemers over klassen en schooltype staat ***in figuur 1***. Ter vergelijking zijn daarin ook de aantallen van 2006, 2007, 2008 en 2009 opgenomen.
In figuur 2 staat de toptien van de scholen met de hoogste score bij de eerste ronde in 2010.
Vorig jaar stonden het Emelwerda College, het Stedelijk Gymnasium Nijmegen en het Christelijk Gymnasium Utrecht ook in de top tien, respectievelijk op plek 2, 1 en 10.

jaar	aantal scholen	aantal leerlingen	1e klas	2e klas	3e klas	4-havo	4-vwo	5-havo	5-vwo
2006	171	2192	*	*	268	129	604	75	1116
2007	185	2742	*	*	344	190	859	105	1244
2008	201	3004	16	49	320	135	1007	109	1338
2009	230	4379	36	114	472	216	1497	120	1924
2010	226	4150	37	119	493	207	1328	112	1854

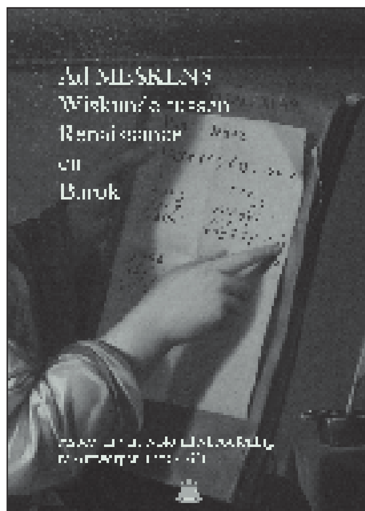
*) Tot 2008 werden de aantallen leerlingen van 1e, 2e en 3e klas bij elkaar opgeteld.

figuur 1

rang	school	plaats	aantal deelnemers	wedstrijdleider	somscore
1	Emelwerda College	Emmeloord	44	K. Braam	131
2	Stedelijk Gymnasium	Schiedam	19	E. Scheurwater	130
3	Stedelijk Gymnasium	Breda	52	W. Cleven	127
4	Barlaeus Gymnasium	Amsterdam	54	B. Zevenhek	118
4	Stedelijk Gymnasium	Nijmegen	38	F. van Megen	118
4	Gomaruscollege	Groningen	31	H. Stoppels	118
7	Theresia Lyceum	Tilburg	12	T. van den Borne	117
8	Sint-Maartenscollege	Maastricht	23	J. Janssen	109
9	Lorentz Casimir Lyceum	Eindhoven	49	B. Friesen	108
10	Christelijk Gymnasium	Utrecht	31	S. Kaldeway	107

figuur 2

Verschenen / Wiskunde tussen Renaissance en Barok



Ondertitel: Aspecten van wiskunde-beoefening te Antwerpen 1550-1620
Auteur: Ad Meskens
Uitgever: Lulu (2009), www.lulu.com
ISBN 978-1-4092-9940-0
Prijs: € 24,75 (paperback)

Wiskunde tussen Renaissance en Barok beschrijft aspecten van wiskunde-beoefening in een handelsmetropool tegen de achtergrond van de 16de-eeuwse godsdienstoorlogen.
Het gaat dieper in op zowel de 'lage' toegepaste wiskunde als de 'hogere' theoretische wiskunde, met het niet oninteressante besluit dat 17de-eeuws wiskundig Noord-Nederland veel te danken heeft aan de Zuid-Nederlandse emigranten/immigranten. De Val van Antwerpen (1585) vormt ook voor de wiskunde-beoefening een duidelijke breuklijn.

Het boek is een heruitgave van de editie van 1994, maar in een totaal ander jasje.

Boekbespreking / Rekenen is leuker dan je denkt

[Epi van Winsen]

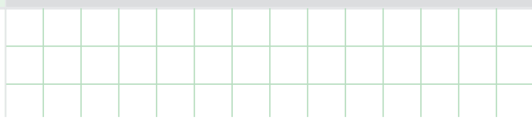


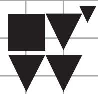
Auteurs: Marjolein Kool, Ed de Moor
Uitgever: Bert Bakker, Amsterdam (2009)
ISBN: 978 90 351 3433 1
Prijs: € 17,50 (paperback, 296 pagina's)

Rekenen is weer hot. De educatieve uitgeverijen komen met oefenboeken en de overheid met verplichte toetsen en referentieniveaus. Onze staatssecretaris zei het zo: 'Taal en rekenen zijn de zuurstof van alle kennis. Daar begint het mee. Iedereen is het er over eens: het taal en rekenniveau van scholieren moet omhoog.'
De titel van dit boek over rekenen lijkt een taalfout te bevatten, maar u hebt allang door dat dat niet het geval is. Rekenen en wiskunde is juist leuker als je denkt.
In 47 korte verhalen wordt het zeer brede onderwerp rekenen van vele kanten bekeken. Marjolein Kool en Ed de Moor delen hun fascinatie voor het rekenen en rekenonderwijs met ons. Het boek is volgens hen geen leerboek maar ze leggen veel uit. Het is geen puzzelboek, maar iedere paragraaf bevat wel een opgave. Het is geen historisch boek, maar bevat geregeld een kijkje terug in de tijd.
Het boek geeft een mooi overzicht over het brede rekenlandschap. Getallen, tafeltjes, cijferend aftrekken en vermenigvuldigen, de staartdeling en de hapmethode, didactiek, priemgetallen en deelbaarheid komen allemaal aan bod.
Natuurlijk ook aandacht voor de rekenmachine die zijn nut heeft bij een vraagstuk als:
Er moet een nieuwe kunststofvloer in het gymlokaal aangelegd worden. De maten van het lokaal zijn 7,15 *meter bij* 15,80 *meter. De prijs van de vloer is* € 235,00 *per vierkante meter exclusief* 19% *btw. Hoeveel koste dit in totaal?*
Maar is dat apparaat ook zinvol bij:
1,4 : 70 =
5432 : 9 Wat is de rest?
500 × 0,25 =
2½ : 2 =
Een haring kostte € 2,50, de nieuwe haring € 2,75. Hoeveel procent duurder?
12,01 – 11,97 =
0,05 × 0,2 =
De trein vertrekt om 22:42u uit Alkmaar en komt om 00:36u in Nijmegen aan. Hoe lang duurt de reis?
1234 m² = … hectare

Een aardige suggestie die ik opgepakt heb uit dit boek is om zo af en toe een rekendictee te gaan geven waarbij de rekenmachines in de tas blijven en pen, papier en gezond verstand de enige toegelaten hulpmiddelen zijn. Ideeën bijvoorbeeld van *www.rekenscheurkalender.nl*.
Naar mijn overtuiging zou iedereen die het reken- en wiskundeonderwijs een warm hart toedraagt, dit boek moeten lezen. Het laat je reflecteren op je werk en heeft veel aanknopingspunten met de dagelijkse lespraktijk. Daardoor krijgen de leerlingen een betere docent voor de klas en daarmee beter rekenonderwijs.

Over de auteur
Epi van Winsen is docent wiskunde en NLT aan de scholengemeenschap Sophianum in Gulpen.
E-mailadres: *evwinsen@home.nl*





Onderhoud van eigen bekwaamheden door scholing

EEN VERKENNING VAN MOGELIJKHEDEN

[Henk Rozenhart]

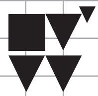
Dit artikel is door de Federatie Onderwijsbonden aangeboden aan de NVvW en van een laatste paragraaf voorzien door Henk Rozenhart. Het artikel is oorspronkelijk geschreven door Jacqueline van Langeraad van VLLT (Vereniging van Leraren in Levende Talen).

Goed onderwijs wordt vooral bepaald door de kwaliteit van de docent. Maar hoe bewaak je als docent je eigen kwaliteit? Met een gedegen opleiding word je in ieder geval bevoegd verklaard, maar is daar alles mee gezegd? De overheid heeft voor een aantal sectoren bepaald dat docenten moeten voldoen aan de bekwaamheidseisen die in de wet BIO (beroepen in onderwijs) worden geformuleerd. Op dit moment vallen het primair onderwijs, het voortgezet onderwijs en de BVE onder de wet BIO.
De genoemde wet bepaalt dat werkgevers beleid moeten formuleren voor het onderhouden van de bekwaamheid van het personeel. Ook wij als vertegenwoordigers van de werknemers, de vakbond, proberen steeds betere afspraken te maken met de werkgevers over scholing. Het is namelijk niet alleen een kwestie van het regelen van een budget om de gewenste cursus mee te betalen, maar ook het treffen van regelingen die voorzien in een vergoeding in tijd.
Er bestaan grofweg twee soorten scholing: scholing in opdracht van de werkgever en scholing naar eigen wens in combinatie met het POP (persoonlijk ontwikkelingsplan) Daarnaast kunnen we onderscheid maken in scholingsmogelijkheden die centraal door overheid aangeboden worden en scholing die door de eigen werkgever wordt mogelijk gemaakt.

Lerarenbeurs
Een algemene beurs die voor elke docent in het (speciaal) primair onderwijs, het voortgezet onderwijs (vo), het middelbaar beroepsonderwijs (mbo) en het hoger beroepsonderwijs (hbo) mogelijk is.
De lerarenbeurs is een vergoeding voor bevoegde leraren die hun professionele niveau willen verhogen, hun vakkennis willen verbreden of zich willen specialiseren. Je kunt dus kiezen voor een opscholen van tweedegraads naar eerstegraads bevoegdheid, maar ook voor een totaal ander vakgebied.
De lerarenbeurs vergoedt (deels) de kosten voor cursus- of collegegeld en de benodigde studiemiddelen en reiskosten. Ook de werkgever kan een vergoeding krijgen waarmee hij de vervanging gedurende de uren studieverlof kan betalen. De beurs is alleen aan te vragen voor een erkende bachelor- of masteropleiding of voor een korte opleiding die gericht is op het verwerven van extra bekwaamheden.
Gedurende je onderwijsloopbaan kun je slechts éénmaal gebruik maken van de lerarenbeurs voor het volgen van één opleiding. De keuze voor de te volgen opleiding ligt volledig in handen van de docent, in tegenstelling tot wat werkgevers soms denken!

Om een idee te geven van de bedragen die omgaan bij de lerarenbeurs een voorbeeld. De werkelijke collegegeldkosten voor de duur van de opleiding met een maximum van drie jaar worden vergoed tot een maximum van €3.500,00. Stel je wilt een reguliere bachelor van drie jaar gaan doen waarvan het collegegeld €2.220,00 bedraagt. Daarbovenop komt een vergoeding voor de studiemiddelen à 10% van het bedrag voor collegegeld. Ook een tegemoetkoming in de reiskosten is voorzien, wederom 10% van het bedrag voor collegegeld. In dit voorbeeld ontvang je naast de €2.220,00 nog twee maal €222,00 euro ofwel €2.644,00 gedurende drie jaar. Daarnaast is het mogelijk om samen met de werkgever studieverlof aan te vragen. Hiervoor ontvangt de werkgever een vast bedrag per onderwijssector per verlofuur met een maximum van 160 klokuren per jaar bij een volledige baan. Bij een deeltijdbetrekking wordt het aantal verlofuren vastgesteld naar rato van de aanstellingsomvang. Bijvoorbeeld bij een betrekkingsomvang van 3 dagen = 0,60 fte worden maximaal 160 × 0,60 = 108 verlofuren toegekend.
De nieuwe aanvraagronde voor studiejaar 2010-2011 is van 1 april 2010 tot en met 13 mei 2010. Voor deze beurs is vooraf een maximum bedrag bepaald per sector. Op





volgorde van aanmelding wordt bepaald wie in aanmerking komt. Op de website van de IB-groep (*www.ib-groep.nl*) staan nadere details.

Reguliere na- en bijscholing
Elke sector heeft in de cao-bepalingen opgenomen over de faciliteiten rondom scholing. Er worden afspraken gemaakt rondom scholing in opdracht van de werkgever, waarbij kosten en tijd veelal voor rekening van de werkgever komen. Dit is bijvoorbeeld wenselijk als werkgelegenheid in het gedrang komt en er met de juiste scholing wel weer uitzicht op werk blijft. De cao kent ook bepalingen in het kader van het POP, waarbij soms expliciet te besteden bedragen zijn vastgelegd. Bij de inzetten voor de komende jaren, zal door de vakbonden ook stevig ingezet worden op het uitbreiden van de faciliteiten. Denkbaar is bijvoorbeeld dat de nu opgenomen bedragen in de cao verhoogd zullen gaan worden of dat er spaarvormen mogelijk gemaakt gaan worden. Op de website van de Federatie Onderwijsbonden (*www.federatie-onderwijsbonden.nl*) zijn de volledige cao-teksten terug te vinden van de lopende cao's. Hieronder volgt een samenvatting per sector op hoofdlijnen.

Primair onderwijs
In overleg met de (G)MR stelt de werkgever het scholing- en professionaliseringsbeleid vast. Er is sprake van een POP (persoonlijk ontwikkelingsplan) en een bekwaamheidsdossier, maar in de huidige cao worden geen expliciete bedragen per persoon toegekend. Wel staat vermeld dat scholing in opdracht van de werkgever volledig vergoed wordt.

Voortgezet onderwijs
Indien de scholing plaats vindt in opdracht van de werkgever, vergoedt de werkgever alle studiekosten en krijg je daarnaast een vergoeding in tijd. In het POP worden de ontwikkelingswensen van zowel de school als de werknemer vastgelegd, waarbij er ook aandacht is voor de verplichtingen vanuit de wet BIO. Er worden tevens afspraken gemaakt over de beschikbare faciliteiten in zowel geld als tijd. In elk functioneringsgesprek moet tijd worden ingeruimd om het POP te bespreken en minstens een maal per drie jaar wordt het POP geactualiseerd. Als werknemer heb je recht op scholing tot een bedrag van jaarlijks tenminste € 500,00 met de kanttekening dat dit voor een parttimer naar rato van de betrekkingsomvang wordt berekend.

BVE
De cao meldt dat de werknemer één keer per jaar recht heeft op een loopbaangesprek en dat daar een persoonlijk ontwikkelingsplan uit kan voortvloeien. Ook hier is sprake van een scholingsplan dat samen met de PMR overeen wordt gekomen. Binnen de BVE werkt men met teams die onderling het werk en ook de beschikbare scholingsuren verdelen. Iedereen die direct betrokken is bij het primaire proces en die benoemd is in een functie met carrièrepatroon 9 of hoger heeft jaarlijks minimaal recht op 59 uur ten behoeve van scholing en professionalisering.

HBO
Ook in deze cao staan diverse bepalingen rondom scholing in opdracht van de werkgever. Afhankelijk van de mate waarin de werkgever de scholing noodzakelijk acht, krijgt de werkgever betaald studieverlof. Op hogeschoolniveau is er 1,4% van de loonsom beschikbaar voor een met de MR besproken scholingsplan. Daarnaast dient iedere werknemer te beschikken over een POP, waarvoor ten minste 59 uur beschikbaar is per docent. Natuurlijk ontvangt een parttimer deze uren naar rato (de deeltijdfactor). Iedereen heeft de beschikking over een persoonlijk budget voor ontwikkeling ter grootte van 0,8% van zijn jaarsalaris, met een minimum van €300,00 euro.

Zestor
Het arbeidsmarkt- en opleidingsfonds van het hbo, Zestor, heeft onlangs de regeling 500 pop geïntroduceerd. Iedere werknemer van een hogeschool kan één keer een bijdrage van maximaal €500,00 aanvragen voor een activiteit uit zijn POP.
Op *www.500pop.nl* staan alle details van deze regeling te lezen.

Nascholing Wiskunde (Henk Rozenhart)
De NVvW en andere organisaties organiseren regelmatig congressen en/of studiedagen die zeer de moeite waard zijn. O.a. de jaarlijkse landelijke studiedag van de NVvW, in november, biedt veel mogelijkheden voor wiskundedocenten om op de hoogte te blijven van de laatste ontwikkelingen.
Kortom, door jaarlijks de beschikbare faciliteiten te gebruiken kun je zelf blijven werken aan je bekwaamheden!

Nieuws uit de Werkgroep-VMBO

[Henk Bijleveld]

De Werkgroep-VMBO komt een aantal keren per jaar bij elkaar om aangelegenheden die het vmbo betreffen, te bespreken. De werkgroep adviseert het bestuur over zaken die het vmbo aangaan en bespreekt actuele ontwikkelingen. De leden van de werkgroep bezoeken scholen om de aandacht te vestigen op de NVvW.
Op 9 februari 2010 kwam de werkgroep met enkele deskundigen bij elkaar om een aantal onderwerpen te bespreken: Kees Lagerwaard, deze keer als deskundige vanuit het Cito, Gert de Kleuver als projectleider van het project RekenVOort en Pieter van de Zwaart vanuit de SLO.
Hieronder volgen de belangrijkste punten die tijdens deze bijeenkomst besproken zijn.

Vmbo-examens

Het blijkt elk jaar dat er voor de examenbespreking van de KB- en TL-examens weinig belangstelling is. Het Cito vindt het erg jammer dat docenten niet laten weten wat de ervaringen met de examens waren, en welke verbeterpunten men ziet. Deze reflectie uit het veld is voor het Cito van belang om de kwaliteit van de examens zo hoog mogelijk te houden. Dat geldt voor de papieren versie van het examen, maar niet minder voor de versie die op de computer wordt afgenomen.
Voor vmbo-KB en vmbo-TL zal dit examenjaar een experiment plaatsvinden: op 70 scholen worden de examens met de computer afgenomen. In deze experimentele fase is het erg belangrijk dat ontdekt wordt wat wel en niet werkt, en dat alle geconstateerde eigenaardigheden bij de examenmakers terecht komen zodat de fouten uit het programma gehaald kunnen worden.
De Werkgroep-VMBO ziet een aantal mogelijkheden om reacties van docenten op de komende examens te verkrijgen: volgend jaar zou tijdens de 'Reehorst-conferentie' (dit jaar als 8e Wiskundeconferentie op het APS gehouden) een workshop plaats kunnen vinden, waarin docenten vmbo gevraagd wordt naar hun bevindingen. Het Cito zou ook zelf vmbo-docenten bij elkaar kunnen roepen.

Project RekenVOort

RekenVOort is een project dat aangevraagd is door de NVvW in 2008 en uitgevoerd wordt door het Freudenthal Instituut. In dit project wordt rekenmateriaal ontwikkeld voor leerlingen die geen wiskunde in hun pakket hebben. Een aantal scholen experimenteert met het materiaal dat in modules is uitgewerkt en waarbij in de opgaven aansluiting gezocht wordt bij de praktijk van een aantal beroepen. Naast de basismodule kan men gebruik maken van een oefenmodule en een toets. Er zal een eindtoets op het niveau 2F worden gemaakt. Het is ook de bedoeling om bij elke module een handleiding te maken.
Met de gegevens van de monitoring wordt er aan het ministerie van OCW een tussenrapportage uitgebracht. Als een school gebruik wil maken van het materiaal, is dat mogelijk om het te downloaden via de site van de NVvW. Al het materiaal moet namelijk vrij toegankelijk zijn voor docenten.

Nomenclatuur

Kees lagerwaard vertelt iets over het nut van een nomenclatuur, niet alleen voor havo/vwo maar ook voor het vmbo. Het vakjargon moet eenduidigheid van begrippen, zowel in examens als in leerboeken, bevorderen temeer omdat bepaalde woorden een meervoudige betekenis kunnen hebben. Om een voorbeeld te noemen: welke van de woorden hoogste, ten hoogste of maximaal gebruiken we in de opgaven? Voor examenmakers en uitgevers is het nuttig om een lijst met woorden te hanteren die door iedereen op dezelfde manier wordt begrepen. Wanneer spreken we van histogram en wanneer van staafdiagram? De werkgroep meent dat het belangrijk is dat er een lijst komt met dergelijke woorden en hun betekenis, en stelt voor dat ze door het bestuur van de NVvW uitgenodigd wordt om daarover te overleggen.

Rekenonderwijs

De SLO is bezig met projecten in het kader van de verbetering van het rekenonderwijs: concretisering van de door de commissie Meijerink aangegeven niveaus, het geven van een toelichting op de referentieniveaus, het uitwerken van een aantal voorbeelden, het ontwikkelen van een programma voor rekenzwakke leerlingen.
Daarnaast is een tiental scholen onder begeleiding van de SLO bezig met het opzetten van een rekenbeleid.

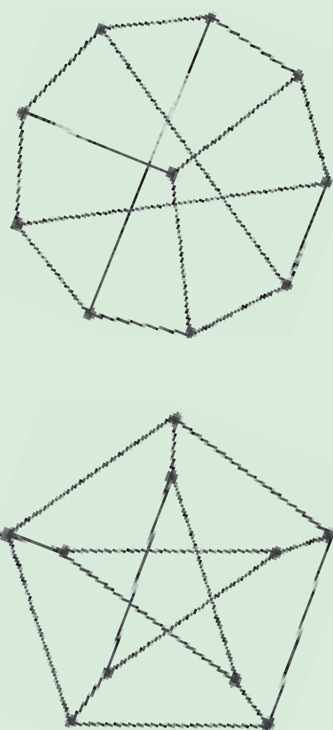
Tot slot

De Werkgroep-VMBO is nog steeds op zoek naar collega's die mee willen denken over het vmbo.
U kunt zich aanmelden bij Henk Bijleveld (e-mailadres: h.bijleveld@nvvw.nl).

Puzzel 85-6

Een familie symmetrische grafen

[Frits Göbel]


figuur 1

Deze keer krijgt u enkele opgaven over een familie van grafen genaamd $G(b, k)$.
Voor een beschrijving van deze familie gaan we uit van de verzameling $B = \{1, 2, ..., b\}$.
De punten van de graaf zijn nu de deelverzamelingen van k elementen uit B.
Twee punten zijn dan en slechts dan buurpunten als de corresponderende verzamelingen disjunct zijn.
Uit de definitie volgt meteen dat alle grafen $G(b, k)$ een hoge mate van symmetrie hebben.
Voor $k = 1$ en ook als $b < 2k$ bestaat de graaf uit losse punten.
Als $b = 2k$ bestaat de graaf uit kopieën van K_2.

Om deze triviale gevallen uit te sluiten, nemen we voor het vervolg $k > 1$ en $b > 2k$.
De eenvoudigste graaf die dan overblijft, $G(5, 2)$, is meteen een interessant geval.
Deze graaf heeft dus 10 punten en is 3-regulier. Hij staat bekend als de Petersen-graaf, genoemd naar de Deense wiskundige J. Petersen (1839-1910). ***In figuur 1*** staan twee symmetrische manieren om de graaf tekenen.
Maar pas in dimensie 4 is de volledige symmetrie goed te 'zien'.

Opgave 1
Bepaal het aantal lijnen van $G(b, k)$.

Onder de *taille* van een graaf verstaat men de grootte van de kleinste cykel die in de graaf voorkomt.

Opgave 2
Bepaal de taille van $G(b, k)$.

Bij de opgaven 1 en 2 wordt alleen het antwoord gevraagd; een bewijs of redenering is niet nodig.

Opgave 3
Gezien aantal punten en graad zou $G(7, 2)$ zelf-complementair kunnen zijn. Is dat ook zo?

Oplossingen kunt u mailen naar *a.gobel@wxs.nl* of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede. Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen met uw oplossing.
De deadline is 22 juni.
Veel plezier!

Oplossing 85-4

Getallen

Er waren deze keer 23 inzenders. De opgaven waren niet erg eenvoudig; ik ontving commentaar als: Intrigerend, Pittig, Wel leuk, Mooie breinbreker, Leuk zo'n open vraagstelling, Bewerkelijk, Wonderlijke opgaven.
Toch waren de meeste oplossingen correct.

De eerste opgave is eigenlijk een bijzonder geval van de tweede, dus we kunnen volstaan met een oplossing van *Opgave 2*.
Eerst bekijken we even waarden van n. Met $x = 1$ en $y = z + 1$ vinden we alle even $n \geq 4$.
Voor $n = 2$ nemen we $x = 3$. Voor alle $r \geq 2$ is $z^2 - y^2 = 3^r - 2$ oplosbaar, omdat het rechterlid een oneven getal > 1 is.
Laat nu n oneven zijn. Met $x = 2$ en $y = z + 1$ vinden we alle oneven $n \geq 2^r + 3$.
Voor oneven n met $1 \leq n \leq 2^r + 1$ nemen we $x = 4$. Nu is $z^2 - y^2 = 4^r - n$ oplosbaar voor alle $r \geq 2$.

Opgave 3 – Een van de eenvoudigste voorbeelden is $r = 2$, $s = 2$, $t = 2k$ met $k > 1$.
Nu kan $n = 6$ niet worden gemaakt. Dit is als volgt in te zien.
Als z even is, is z^{2k} deelbaar door 16, dus $z^{2k} + 6 = 6 \bmod 8$, en dus geen som van twee kwadraten.
Als z oneven is, is $z^{2k} = 1 \bmod 4$, dus $z^{2k} + 6 = 3 \bmod 4$, ook geen som van twee kwadraten.

Ik ontving van sommige inzenders veel andere voorbeelden. Het interessantst zijn de voorbeelden met betrekkelijk kleine exponenten.
In het geval $r = s = t = 3$ zagen diverse inzenders dat getallen van de vorm $n = 4 \bmod 9$ niet kunnen worden gerepresenteerd en $n = 5 \bmod 9$ evenmin.
Als $(r, s, t) = (4, 4, 2)$ geldt hetzelfde voor $n = 3 \bmod 8$.
Met behulp van een stelling van Fermat kunnen veel voorbeelden met grotere exponenten worden gevonden.
Laat p een priemgetal zijn. Dan geldt: $a^{p-1} = 0$ of $1 \bmod p$ al naar gelang a wel of niet deelbaar is door p.
Dus in de gevallen $(p - 1, p - 1, p - 1)$ kunnen alleen de restklassen -1, 0, 1 en 2 worden gerealiseerd. Dat betekent dat vanaf $p = 5$ er niet voor alle n een oplossing is.

De allereerste inzender, Paul Dillo, stuurde een andere rij, die later ook door enkele andere oplossers is ingezonden.
Laat p een priemgetal zijn waarvoor ook $q = 2p + 1$ priem is. (Ik weet niet of bewezen is dat dit oneindig vaak voorkomt; het lijkt me in ieder geval een redelijk vermoeden.)
Dan is $(a^p)^2 - 1$ deelbaar door q, dus $a^p \bmod q = -1, 0$ of 1 en nu kunnen alleen de restklassen -3, -2, -1, 0, 1, 2 en 3 worden gemaakt. Voor voldoend grote p blijven er dus weer onoplosbare gevallen over.

Ladderstand

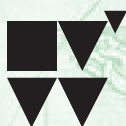
De top van de ladder ziet er nu als volgt uit:
H. Klein 528
L.H. v.d. Raadt 523
W. Doyer 507
J. Hanenberg 415
T. Kool 402
H. Linders 345
H. Bakker 325
N. Wensink 322
W. v.d. Camp 322
K.Verhoeven 297
K. v.d. Straaten 287

SERVICEPAGINA

Voor overige internet-adressen zie *www.wiskundepersdienst.nl/agenda.php*

Voor Wiskundeonderwijs Webwijzer zie *www.wiskundeonderwijs.nl*

Publicaties van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren



Zebraboekjes

1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christiaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde
22. Spelen en Delen
23. Experimenteren met kansen
24. Gravitatie
25. Blik op Oneindig
26. Een Koele Blik op Waarheid
27. Kunst en Wiskunde
28. Voorspellen met Modellen
29. Getallenbrouwerij
30. Passen en Meten met Cirkels

Zie verder ook *www.nvvw.nl/zebrareeks.html* en/of *www.epsilon-uitgaven.nl*

Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo

Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

Honderd jaar wiskundeonderwijs, lustrumboek van de NVvW

Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW: *www.nvvw.nl/lustrumboek2.html*
Voor overige NVvW-publicaties zie de website: *www.nvvw.nl/Publicaties2.html*

Kalender

In de kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo vroeg mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur, het liefst via e-mail (*redactie-euclides@nvvw.nl*). Hieronder vindt u de verschijningsdata van Euclides in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdatum is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de *eind*versies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook *www.nvvw.nl/euclricht.html*.

nr.	verschijningsdatum	deadline
7	6 juli 2010	11 mei 2010

Jaargang 86

nr	voorlopige verschijningsdata	deadline
1	14 september 2010	20 juli 2010
2	26 oktober 2010	31 aug. 2010
3	21 december 2010	26 okt. 2010
4	8 februari 2011	7 dec. 2010
5	29 maart 2011	1 feb. 2011
6	17 mei 2011	18 mrt. 2011
7	5 juli 2011	10 mei 2011

maandag 17 mei, TU Eindhoven
Bijeenkomst Analytische Meetkunde (wiskunde D)
Organisatie Regionaal Steunpunt Eindhoven

di. 18 t/m do. 27 mei, op de scholen
Centrale Examens wiskunde
Organisatie CvE
Zie pag. 206 in nummer 85-5.

do. 20 t/m vr. 28 mei, regionaal
Examenbesprekingen 2010
Organisatie NVvW
Zie pag. 224 en pag. 225 in nummer 85-5.

vrijdag 28 mei, Utrecht
Studiemiddag: Rekenen, de overgang van po naar vo
Organisatie APS

maandag 31 mei, Utrecht
Studiemiddag: Schoolvisie op rekenen ontwikkelen en formuleren
Organisatie APS

vrijdag 4 juni, Utrecht
Wiskunde D-dag
Organisatie cTWO

dinsdag 8 juni, Amersfoort
Focusgroepbijeenkomst
Organisatie cTWO en SLO

vrijdag 11 juni, Utrecht
Bèta onder de Dom
Organisatie Bètasteunpunt Utrecht

vrijdag 11 juni, Utrecht
Studiemiddag: Rekenproblemen
Organisatie APS

vrijdag 18 juni, Utrecht
Studiemiddag: Hoogbegaafde leerlingen in de wiskundeles
Organisatie APS

wo. 23 t/m vr. 25 juni, Enschede
Onderwijs Research Dagen
Organisatie Universiteit Twente

zaterdag 6 november
Jaarvergadering/Studiedag
Organisatie NVvW